



UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Educación Básica

La Taptana y la Yupana como herramientas didácticas para el aprendizaje de la suma y resta.

Trabajo de titulación previo a la obtención del
título de Licenciada en Ciencias de la
Educación Básica

Autora:

Jennifer Vanessa Cabrera Peñaloza

CI: 0105704027

Correo electrónico: jenncabrera99@hotmail.com

Directora:

Gina Catalina Bojorque Iñegues

CI: 0102603743

Cuenca, Ecuador

25-noviembre-2021



RESUMEN

El presente trabajo monográfico es relevante en el ámbito educativo, específicamente en el área de la matemática pues, pretende demostrar la importancia del uso de la Taptana y la Yupana como herramientas didácticas para el aprendizaje de sumas y restas. Para alcanzar este objetivo se consultaron y analizaron libros, artículos científicos, ensayos, y otros documentos relacionados con el tema. Además, se realizó una entrevista a nueve docentes, sobre sus percepciones y experiencias acerca de la contribución de la Taptana y la Yupana al aprendizaje de la suma y la resta, y sobre el aporte de dichas herramientas a otros aprendizajes de los niños. En la revisión de literatura se encontró que, efectivamente, tanto la Taptana como la Yupana favorecen al aprendizaje de la suma y resta de los estudiantes. Además, en los resultados de las entrevistas indicaron que la Taptana y la Yupana ayudan tanto al aprendizaje de la suma y resta como al aprendizaje de otras habilidades matemáticas. Por último, se concluye que, aunque estas herramientas ancestrales no son ampliamente conocidas, continúan empleándose por algunos docentes dentro y fuera del país.

Palabras claves: Herramientas didácticas. Matemática. Taptana. Yupana. Suma. Resta.



ABSTRACT

This monograph work is relevant in the educational field, specifically in the area of mathematics, given that, it aims at demonstrating the importance of using the Taptana and Yupana as didactic tools for learning addition and subtraction. To achieve this aim, different books, scientific articles, essay, and other documents related to the topic were consulted and analyzed. Additionally, it was conducted an interview to nine teachers about their perceptions and experiences about the contribution of the Taptana and the Yupana to the learning of addition and subtraction, as well as the contribution of such tools to other children's learning. In the literature review it was found that, indeed, both the Taptana and the Yupana benefit students' learning of addition and subtraction. In addition, the results of the interviews indicated that the Taptana and the Yupana help to both, the learning of addition and subtraction and the learning of other mathematical skills. Finally, it is concluded that, although these ancestral tools are not widely known, they continue to be used by some teachers inside and outside the country.

Keywords: Teaching tools. Mathematics. Taptana. Yupana. Addition. Substraction.



Índice del Trabajo

RESUMEN	2
ABSTRACT	3
AGRADECIMIENTOS	13
DEDICATORIA	14
INTRODUCCIÓN	15
CAPÍTULO 1	18
1. Las matemáticas en el contexto occidental y andino	18
1.1. La racionalidad matemática occidental	18
1.1.1. Aportes matemáticos de la cultura occidental	21
1.2. La racionalidad matemática andina	24
1.2.1. Aportes matemáticos de la cultura andina	32
CAPÍTULO 2	35
La Taptana y la Yupana	35
2.1. Breve reseña histórica sobre Taptana	35
2.1.1. Importancia de la Taptana como material didáctico	41
2.1.2. Funciones matemáticas de la Taptana	41
2.1.3. La Taptana en la enseñanza de la suma y resta	42
2.1.3.1 La suma y la resta con la Taptana cañari	42



2.1.3.2. La suma y resta con la Taptana Montaluisa	61
2.1.3.3 La suma y resta con la Taptana UNAE	78
2.2. Breve reseña histórica sobre la Yupana.....	95
2.2.2. Funciones matemáticas de la Yupana	101
2.2.3. La Yupana en la enseñanza de suma y resta	101
CAPÍTULO 3.....	116
Contribución de la Taptana y Yupana a la enseñanza-aprendizaje de la suma y resta ..	116
3.1. Contribución de la Taptana a la enseñanza aprendizaje de la suma y resta.....	116
3.2. Contribución de la Yupana a la enseñanza aprendizaje de la suma y resta	118
3.3. Perspectivas docentes frente al uso de la Taptana y Yupana en el aprendizaje de la suma y resta	121
CONCLUSIONES	130
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	132



Índice de figuras

Figura 1: <i>Crónicas Guaman Poma de Ayala sobre los quipus</i>	28
Figura 2: <i>Los Nudos del Quipus</i>	29
Figura 3: <i>La Yupana y el Quipu</i>	30
Figura 4: <i>Taptana Cañari</i>	31
Figura 5: <i>Taptana</i>	35
Figura 6: <i>Taptana o Contador Cañari</i>	37
Figura 7: <i>Taptana Montaluisa</i>	38
Figura 8: <i>La Taptana Montaluisa</i>	39
Figura 9: <i>Taptana UNAE</i>	40
Figura 10: <i>Taptana o Contador Cañari</i>	43
Figura 11: <i>La Taptana Cañari</i>	44
Figura 12: <i>La Taptana Cañari</i>	45
Figura 13: <i>La Taptana Cañari</i>	46
Figura 14: <i>La Taptana Cañari</i>	47
Figura 15: <i>La Taptana Cañari</i>	48
Figura 16: <i>La Taptana Cañari</i>	49
Figura 17: <i>La Taptana Cañari</i>	50
Figura 18: <i>La Taptana Cañari</i>	51
Figura 19: <i>La Taptana Cañari</i>	51



Figura 20: <i>La Taptana Cañari</i>	52
Figura 21: <i>La Taptana Cañari</i>	53
Figura 22: <i>La Taptana Cañari</i>	54
Figura 23: <i>La Taptana Cañari</i>	55
Figura 24: <i>La Taptana Cañari</i>	56
Figura 25: <i>La Taptana Cañari</i>	56
Figura 26: <i>La Taptana Cañari</i>	57
Figura 27: <i>La Taptana Cañari</i>	58
Figura 28: <i>La Taptana Cañari</i>	59
Figura 29: <i>La Taptana Cañari</i>	60
Figura 30: <i>La Taptana Cañari</i>	61
Figura 31: <i>La Taptana Montaluisa</i>	62
Figura 32: <i>La Taptana Montaluisa</i>	63
Figura 33: <i>La Taptana Montaluisa</i>	64
Figura 34: <i>La Taptana Montaluisa</i>	65
Figura 35: <i>La Taptana Montaluisa</i>	66
Figura 36: <i>La Taptana Montaluisa</i>	67
Figura 37: <i>La Taptana Montaluisa</i>	68
Figura 38: <i>La Taptana Montaluisa</i>	69
Figura 39: <i>La Taptana Montaluisa</i>	70



Figura 40: <i>La Taptana Montaluisa</i>	71
Figura 41: <i>La Taptana Montaluisa</i>	72
Figura 42: <i>La Taptana Montaluisa</i>	73
Figura 43: <i>La Taptana Montaluisa</i>	74
Figura 44: <i>La Taptana Montaluisa</i>	75
Figura 45: <i>La Taptana Montaluisa</i>	76
Figura 46: <i>La Taptana Montaluisa</i>	77
Figura 47: <i>La Taptana Montaluisa</i>	78
Figura 48: <i>La Taptana UNA E</i>	79
Figura 49: <i>La Taptana UNA E</i>	80
Figura 50: <i>La Taptana UNA E</i>	81
Figura 51: <i>La Taptana UNA E</i>	82
Figura 52: <i>La Taptana UNA E</i>	83
Figura 53: <i>La Taptana UNA E</i>	84
Figura 54: <i>La Taptana UNA E</i>	85
Figura 55: <i>La Taptana UNA E</i>	86
Figura 56: <i>La Taptana UNA E</i>	87
Figura 57: <i>La Taptana UNA E</i>	88
Figura 58: <i>La Taptana UNA E</i>	89
Figura 59: <i>La Taptana UNA E</i>	90



Figura 60: <i>La Taptana UNAЕ</i>	91
Figura 61: <i>La Taptana UNAЕ</i>	92
Figura 62: <i>La Taptana UNAЕ</i>	93
Figura 63: <i>La Taptana UNAЕ</i>	94
Figura 64: <i>La Taptana UNAЕ</i>	95
Figura 65: <i>Crónica de Guaman Poma de Ayala</i>	96
Figura 66: <i>Vasija Inca</i>	97
Figura 67: <i>Yupana de Dhavit Prem</i>	100
Figura 68: <i>La Yupana</i>	102
Figura 69: <i>La Yupana</i>	103
Figura 70: <i>La Yupana</i>	104
Figura 71: <i>La Yupana</i>	105
Figura 72: <i>La Yupana</i>	106
Figura 73: <i>La Yupana</i>	107
Figura 74: <i>La Yupana</i>	108
Figura 75: <i>La Yupana</i>	109
Figura 76: <i>La Yupana</i>	110
Figura 77: <i>La Yupana</i>	111
Figura 78: <i>La Yupana</i>	112
Figura 79: <i>La Yupana</i>	113



Figura 80: *La Yupana* 114

Figura 81: *La Yupana* 115

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Jennifer Vanessa Cabrera Peñaloza en calidad de autora y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "La Taptana y la Yupana como herramientas didácticas para el aprendizaje de la suma y resta", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 25 de noviembre del 2021



Jennifer Vanessa Cabrera Peñaloza

C.I: 0105704027

Cláusula de Propiedad Intelectual

Jennifer Vanessa Cabrera Peñaloza, autora del trabajo de titulación "La Taptana y la Yupana como herramientas didácticas para el aprendizaje de la suma y resta", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, 25 de noviembre del 2021



Jennifer Vanessa Cabrera Peñaloza

C.I: 0105704027



AGRADECIMIENTOS

En la presente monografía agradezco la ayuda de mi tutora de tesis, la Dra. Gina Bojorque, por apoyar la investigación de principio a fin. A los docentes entrevistados, que amablemente me compartieron su experiencia. A la familia que formé dentro de la carrera tanto con los compañeros como con los docentes. Al apoyo incondicional que me brindó mi familia para concluir los estudios. Y a ti, que me regalas tu tiempo leyéndome.



DEDICATORIA

Dedicada a los hijos de los pueblos originarios de los Andes, quienes vociferan la liberad del Abya Yala. A la fortaleza de mi madre, la sabiduría de mi padre, la locura de mis hermanos y a los sueños de mis abuelos deseándome un mejor porvenir.

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con Parra y Saiz (2002), el desarrollo de las habilidades matemáticas desde los primeros años de escolaridad es fundamental, pues dichas habilidades constituyen la base para que los estudiantes puedan desarrollar el pensamiento lógico y la capacidad de resolución de problemas presentes en situaciones de la vida diaria. Por ello, de acuerdo a los mismos autores, resulta importante emplear herramientas didácticas pertinentes, que permitan a los niños desarrollar al máximo sus habilidades matemáticas desde temprana edad. Dichas herramientas deben responder a las necesidades e intereses de los niños, así como al contexto cultural en cual se desenvuelven. Tal es el caso de la Taptana y la Yupana, que son herramientas propias del contexto andino, sin embargo, lamentablemente son poco difundidas y conocidas dentro de las instituciones educativas del Ecuador o su uso se limita solamente a centros educativos interculturales bilingües (Castro, 2014). Este hecho se corroboró durante las prácticas pre-profesionales realizadas en instituciones educativas de la ciudad de Cuenca pues, se evidenció la falta de implementación de herramientas didácticas ancestrales, propias de la cultura andina como la Taptana y la Yupana.

Para la presente monografía es indispensable generar una ruptura en la tendencia a pensar que las matemáticas desde la racionalidad occidental son únicas, y reconocer otras perspectivas culturales de la matemática, es decir, tomar en cuenta herramientas matemáticas que surgieron en los pueblos y nacionalidades prehispánicas, como la Taptana y la Yupana (Yáñez y Yáñez, 2014). Por consiguiente, el objetivo de la presente investigación fue demostrar bibliográficamente la importancia del uso de la Taptana y la Yupana como herramientas didácticas para el aprendizaje de sumas y restas en el contexto andino. Para este objetivo general, se plantearon tres objetivos específicos (1) comprender la enseñanza y aprendizaje de la suma y la resta dentro del contexto occidental y del contexto andino, (2) caracterizar a la Taptana y la Yupana como herramientas de

cálculo ancestral, (3) determinar la contribución del uso de Taptana y la Yupana para el cálculo matemático en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las sumas y las restas.

La metodología para la realización de la monografía, fue en primer lugar, la investigación documental a través del análisis y síntesis de información que permitió identificar y explicar la relación entre la Taptana y la Yupana con el aprendizaje de la suma y resta en Educación Básica. De modo que, se partió de la, indagación, selección, y recopilación de información mediante la lectura crítica y análisis de libros, artículos, documentos y más materiales bibliográficos. En segundo lugar, se aplicó una entrevista semi-estructurada de siete preguntas a nueve docentes de Ecuador, Perú y Guatemala que usan la Taptana o la Yupana en sus aulas de clases para conocer sus percepciones con el uso de los instrumentos antes mencionados. Los resultados se categorizaron en aportes de la Taptana y la Yupana al aprendizaje de la suma y resta y aportes adicionales de la Taptana y la Yupana al aprendizaje de las matemáticas. Finalmente, se sintetizó y analizó la información recopilada de la revisión bibliográfica y de las entrevistas, de tal manera que se llegó a establecer conclusiones claras y a alcanzar los objetivos planteados.

El presente trabajo de titulación se divide en tres capítulos. En el Capítulo I, se presenta una síntesis sobre la racionalidad matemática occidental y andina, con sus respectivas perspectivas sobre aprendizaje en el área de la matemática, destacando aportes a la matemática de los pueblos y civilizaciones como los aztecas, mayas, incas, cañaris, chinos, árabes e indios. En el Capítulo II, primero, se detalla el contexto histórico de la Taptana y la Yupana, segundo, se describe las características principales de las herramientas mencionadas, tercero, se expone algunas funciones matemáticas que se desarrollan a partir de su uso y, por último, se realiza una descripción detallada para sumar y restar con la Taptana (Cañari y Montaluisa), y con la Yupana. Finalmente, en el Capítulo III, se da a conocer algunos estudios previos que evidencian la contribución de la Taptana



y la Yupana al aprendizaje de la suma y resta; y se reportan los resultados obtenidos de una entrevista realizada a nueve docentes de Ecuador, Perú y Guatemala, sobre sus experiencias con la aplicación de la Yupana o la Taptana en sus aulas de clase.

Al final del trabajo de investigación se concluye, mediante revisión bibliográfica y la aplicación de una entrevista, la eficacia de incluir a la Taptana y la Yupana como herramientas didácticas dentro del aula de clase, puesto que, provee múltiples beneficios como mejorar la comprensión del sistema posicional, la representación de cantidades, la composición y la descomposición de cantidades, la asociación entre el símbolo y la cantidad, la ordenación, agrupación, clasificación y comparación de cantidades, la operación de las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, por último, refuerza la identidad cultural de cada estudiante.

CAPÍTULO 1

1. Las matemáticas en el contexto occidental y andino

La forma de ver el mundo en cada cultura influye necesariamente en su interpretación de la naturaleza que le rodea, así como en el aprendizaje de las distintas áreas del conocimiento, incluyendo las matemáticas (Peña, 2005), que constituye el principal objeto de estudio del presente trabajo. Por ello, en este capítulo se analizará las matemáticas desde las visiones de dos contextos distintos como son, el contexto occidental y el contexto andino, lo cual permitirá comprender de manera más amplia la influencia de distintas culturas en el aprendizaje de las matemáticas. Por un lado, la visión occidental, ayudará a comprender la racionalidad de las matemáticas occidentales y su influencia y popularidad en el aprendizaje de esta área en Latinoamérica. Por otro lado, la visión andina, ayudará a comprender la racionalidad matemática propia de la cultura andina, sus principios fundamentales y su propuesta matemática. A continuación, se presenta una breve síntesis de la racionalidad matemática occidental y andina y sus respectivas propuestas para el aprendizaje de las matemáticas.

1.1. La racionalidad matemática occidental

Según Eaggers (1995), la racionalidad matemática occidental se constituyó a partir de las contribuciones milenarias de los pueblos de Oriente y del Mediterráneo Antiguo. Algunos de los aportes al campo de las matemáticas desde occidente, provienen en su mayoría de las civilizaciones de la India, Mesopotamia, Grecia, y de los pueblos árabes, dichos conocimientos son usados todavía en la actualidad. A continuación, se realizará un breve recorrido a través de la historia para comprender el origen de las contribuciones a la racionalidad matemática occidental y su influencia en la actualidad.

De acuerdo con Saneen (1999), fueron las culturas Mesopotámicas (por ejemplo, ternas pitagóricas y tablas de multiplicar), chinas (por ejemplo, el ábaco y el sistema digital), y egipcias (por ejemplo, operaciones matemáticas desde el planteamiento de problemas), las primeras en vincular las matemáticas con el ordenamiento y organización de las relaciones comerciales y productivas, dentro de sus comunidades y con poblaciones cercanas. Las evidencias arqueológicas de estas culturas (documentos, papiros, instrumentos, entre otros) todavía perduran en las regiones donde se asentaron, a través, de ellos se puede apreciar la visión matemática que prevalecía en aquellas sociedades. Así, es posible conocer su forma de vincularse con el medio, su sistema de intercambio y elaboración de bienes, sus construcciones, y su administración, acciones fueron posibles gracias a sus conocimientos matemáticos.

Después, los conocimientos matemáticos de Mesopotamia, China y Egipto fueron incorporados por la cultura griega. Los pensadores de Grecia fueron quienes, además de sumar a su cultura los conocimientos matemáticos construidos por otras civilizaciones, convirtieron a las matemáticas en un componente esencial para la explicación racional de la naturaleza, y lograron vincular explícitamente el conocimiento matemático con la reflexión filosófica (Saneen, 1999). Ejemplos de aquello son los términos abstractos que ellos introdujeron para entender la racionalidad de los fenómenos y que pertenecen desde entonces tanto a la filosofía como a las matemáticas, por ejemplo, el término infinito, que representa una cantidad sin límite. Por ello, se afirma que los orígenes de las matemáticas occidentales coinciden con el desarrollo de la filosofía y se vinculan entre sí (Saneen, 1999).

Más adelante, Ruíz (2002) expone que en la Edad Media en los siglos XIV y XV, ocurre una ruptura entre la filosofía y la ciencia de la matemática, la causa profunda es que la filosofía tiene como característica dar una idea totalizadora de la realidad y en muchos casos sus teorías

carecían de exigencia epistemológica. Por ejemplo, varios filósofos presocráticos mencionaban que el agua es el origen de todas las cosas, lo cual era una visión general de la realidad, sin embargo, también era importante conocer los componentes químicos del agua y otros datos. Ahora bien, debido a la gran acumulación de conocimiento del momento y falta de rigurosidad epistémica era dificultoso el estudio del todo. Por lo que, de acuerdo a Arana (2015), esto significó que la matemática, buscara un método más allá de lo teórico, es decir, se comenzaran a considerar elementos prácticos para la experimentación y sustentación de las teorías propuestas. Por consiguiente, se comienzan a construir modelos de razonamiento matemáticos que empiezan a estandarizar la forma de conocer las explicaciones racionales de la naturaleza; es decir, se establecen caminos y esquemas para el razonamiento de las operaciones científicas de los individuos.

Aunque el legado de Grecia fue amplio y enriquecedor, los conocimientos de otras culturas, especialmente de la India, también influyeron en la racionalidad matemática occidental. Villamil y Riscanevo (2020), mencionan que, los indios destacaban en la trigonometría, geometría y operaciones aritméticas. De acuerdo con los mismos autores, una de las principales contribuciones de los indios fue el número cero, que cumplía tres funciones: la nada como número, el lugar vacío en una columna de un número posicional, y como elemento para operar. La primera función corresponde a considerarlo con valor nulo si está solo y si está acompañado por otro valor, dependerá de su posición. La segunda función corresponde a notación posicional, es decir, la ocupación de los lugares donde no hay una cifra significativa, por ejemplo, si está situado a la derecha de un número entero se multiplica por diez su valor; colocado a la izquierda, no lo modifica. La tercera función hace referencia a cómo actúa dentro de las operaciones matemáticas, por ejemplo, cuando esta una suma actúa como un elemento neutro, es decir, cualquier número a,

sumado con 0 vuelve a dar a 0 cuando es un producto, actúa como elemento absorbente, es decir, cualquier número operado con 0 da 0.

El legado matemático griego e hindú fue recogido también por los árabes, quienes aportaron al entendimiento del número negativos y el uso de variables para operar, que se pueden visibilizar en el álgebra (Villamil y Riscanevo, 2020). Durante la Edad Media, los trabajos de los árabes fueron los más reconocidos y tuvieron gran importancia junto con los descubrimientos anteriores de Mesopotamia, China, Egipto e India. Posteriormente, dichos conocimientos matemáticos de occidente aportados por los pueblos anteriormente mencionados fueron transmitidos a Europa, y conformaron una base imprescindible para el desarrollo de la matemática y la ciencia posterior, expandiendo su legado a América tras la llegada de los españoles a pueblos americanos (Alquinga 2020).

1.1.1. Aportes matemáticos de la cultura occidental

Según Anglin (1994) menciona que, los principales aportes matemáticos de dicha visión se presentan a continuación:

- El sistema numérico consta de un conjunto de signos o símbolos los cuales representan una determinada cantidad. Por ejemplo, el número 1 representa la cantidad de “uno”, independientemente del elemento al que sea asociado (animales, cosas, personas, entre otros). Este hecho que hoy nos resulta obvio es un gran paso en el camino de la abstracción; pues en la antigüedad transcurrieron milenios antes de que el uno, o el dos, o el tres, etc., pudieran separarse del objeto específico al cual representaban. Entonces, los números se convierten en instrumentos abstractos, generales y aplicables para cualquier elemento, objeto o situación independiente a su naturaleza.

- El sistema numérico es de base decimal, es decir, está compuesto por diez signos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9; cualquier otra cantidad puede construirse en base a estos signos. Además, permite realizar una serie de ascensos regulares hacia múltiplos de la base, por ejemplo, 10, 20, 30, 40, 50..., 100, 200, 300, 400, 5000 ..., 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 ..., hasta el infinito.
- Otra característica importante es la notación posicional, la cual se refiere a que cada signo tiene asignado un valor según el lugar en donde esté posicionado. El primer lugar a la derecha corresponde a las unidades. Las unidades corresponden a la serie de número del hasta uno hasta el número nueve. El segundo lugar corresponde a las decenas, el tercer lugar a las centenas, y así sucesivamente. Por ejemplo, si leemos 6734 sabemos que se trata de 6 unidades de mil, más 7 centenas, más 3 decenas. más 4 unidades. La notación posicional es muy importante, debido a su potencia algorítmica, es decir, convierte la resolución de operaciones muy complejas en simples. Por ejemplo, al realizar una suma, es sencillo colocar las cantidades si se conoce su posición, y sumarlas de acuerdo a su valor; es simple pues, en otros sistemas de números, como en el romano, su ejecución requiere más complejidad.
- Ligado a la característica anterior está la necesidad de la existencia del cero. Y es indispensable su existencia puesto que si se desea escribir "diecinueve" no se hallaría dificultad, sin embargo, al escribir "ciento nueve" se podría dejar un "espacio" entre el uno y el nueve, de esta forma: 1_9, sin embargo, no sería posible definir el ancho del espacio que represente al cero. También, se presentarían dificultades para distinguir el número "veinte" del número "dos", ya que ambos se representan por el mismo numeral 2 y un espacio.

- Los sistemas de pesas y medidas, aparecieron como una simple comparación de tamaños entre los objetos. Además, a medida que la economía y las construcciones de las sociedades adquirieron mayor complejidad se encontró la necesidad del uso de una medida fija a ser tomada como referencia. Inicialmente, las sociedades empleaban las partes del cuerpo como sistema de referencia de medidas, las más elementales eran el uso de la palma, codo, pie, entre otros; sin embargo, eran medidas muy inexactas y variables de persona a persona y dejaron de ser útiles cuando las sociedades comenzaron a realizar mutuos intercambios. Por ello, se requirió el uso de patrones fijos y precisos, dichos patrones de medidas garantizaban el registro exacto de los tributos. Es así que, los primeros patrones fueron varillas utilizadas para medir longitudes y piedras empleadas como pesas. Una de las primeras culturas que estableció un sistema de pesos y medidas unificado fueron los sumerios que poseían doce diferentes sistemas de unidades, reducidos en la actualidad en tres: longitudes, superficies y capacidades. En la actualidad, se usa un único sistema de numeración decimal acompañado de la unidad correspondiente, por ejemplo, el metro para una longitud, kilogramo para el peso o litro para la capacidad, además, de sus respectivos múltiplos y submúltiplos.
- El sistema sexagesimal se usó para medir el tiempo y los ángulos y consiste en un sistema de numeración posicional que emplea como base el número 60. Actualmente el sistema sexagesimal es aplicado en mediciones y cálculos que requieren del 60 y sus múltiplos; por ejemplo: el círculo y sus divisiones, la esfera celeste o radio arbitrario imaginario en astronomía, el globo terráqueo en geografía, y el tiempo, que es usado en la mayoría de ciencias.

- Otra característica del sistema numérico es que cualquier cantidad puede ser comparada con otra de su misma especie, mediante una relación de orden con propiedades y atributos particulares. Esto permite reconocer si una cantidad es mayor, menor o igual a otra. Por ejemplo, 10 libras es menos que 30 libras. Además, para atribuir un significado comparativo y relacional entre cantidades, es importante que cualquier cifra sea acompañada por la unidad del sistema de medidas, puesto que, no será lo mismo, comparar 10 Km y 10 m; si bien son las mismas cantidades (es decir, 10), no tiene la misma unidad de longitud, por lo que se requerirá realizar una conversión para igualar la unidad de medida (a Kilómetros o a metros) para poder compararlas.
- Los números negativos son considerados como “menos que nada” o “menores a cero” desde el punto de vista operacional. Además, son el resultado de efectuar operaciones y cálculos aritméticos o algebraicos, por tanto, tienen una existencia matemática real.

1.2. La racionalidad matemática andina

Es común considerar que la ciencia de la matemática es un resultado del proceso de pensamiento y razonamientos de Occidente, sin embargo, el proceso de construcción de esta ciencia, también se desarrolló en de distintas formas en otras sociedades originarias, lo que, a su vez, influyó en el cambio de las formas de producción que las civilizaciones han experimentado (Ruíz, 2002). En América prehispánica, específicamente en territorios andinos, surgieron importantes aportes y conocimientos a la ciencia de la matemática, conocimientos omitidos tras la conquista española. Así, Montaluisa (2010), menciona que los países de la comunidad andina y mesoamericana poseen un pasado matemático importante que, desafortunadamente, no suele reconocerse con frecuencia en los procesos de enseñanza-aprendizaje.



Desde las evidencias arqueológicas encontradas, se observa que la comunidad andina desarrolló técnicas numéricas y de cálculo derivadas del uso del cuerpo, semillas, nudos, piedras, y tablas de conteo. A continuación, se profundizará algunas características asociadas a la racionalidad matemática andina y las aplicaciones en su entorno.

Según Villavicencio (1983), el conteo, ya sea en quechua, aimara, puquina u otras lenguas, se caracterizaba por presentar reglas específicas y una secuencia lógica sumativa de los números, por ejemplo, en aimara se cuenta así, *maya (1), paya (2), quimsa (3) ... tunca (10), tunca mayani (11), tunca payani*, etc. Como se evidencia en el ejemplo anterior, la numeración sigue un orden específico, respondiendo a una secuencia aditiva y se van componiendo a partir la agrupación de diez números. El conteo de números, eran registrados en elementos concretos, como partes del cuerpo, huesos, cuerdas, nudos, tablas etc. Incluso, algunos numerales proceden de metáforas, por ejemplo, en aimara *qallqu* es mano, pero también hace alusión a la cantidad cinco o en matsigenka, la palabra *tsonkawakoaka*, es se acabaron los dedos de las manos y hace referencia al diez (Pilares, 2005). El cero, no era aceptado como un número, sino más bien como un concepto de la ausencia de elementos.

Con respecto al sistema de numeración, Pilares (2005) menciona que, se compone de seis familiares lingüísticas, aimara, pano, arahuaca, pano, witoto, cahuapana y el quechua. A partir de la interpretación de esas expresiones lingüísticas, se evidencia que responden a un sistema de numeración decimal aditivo, pues los elementos representados por algún objeto (piedras, mullos), suelen agruparse con diez elementos, y a partir del onceavo elemento se componen los números con las diez primeras unidades. Es decir, el número uno en aimara es *maya (1)* y el diez es *tunca*, para decir once, no se crea una nueva denominación sino se compone el diez y el uno, *tunca mayani*. De acuerdo al mismo autor, para la composición de cantidades se toma en cuenta las leyes de



composición, para el régimen aditivo la terminación numérica es <<ni>> por ejemplo, doce sería, tunca payani, mientras que para el régimen multiplicativo se añade <<yuq>>, por ejemplo, el número trece sería tunca kimsayuq. Así mismo, los números no se iteran un mismo numeral, por ejemplo, sería crearía un conflicto si se dice, maya maya, porque si se desea decir once ya está la ley de la composición o si se desea decir una vez el uno también ya hay una denominación. También Villavicencio (2015) menciona que, existen otros sistemas de numeración andino como el binario, ternario, quinario y octonario, pero eran usados con menos frecuencia.

Según Villavicencio (2015), las culturas de los andes también desarrollaron un sistema geométrico proporcional de medidas, basado en la estrella de sur y el ángulo formado por la alineación de las estrellas en las noches de solsticios, creando un valor teórico de 3.16, cercano al valor de pi. El modo operativo para sacar este resultado era de un total de ocho operaciones, cuatro de las cuales era para la obtener la primera cruz cuadrada y 4 para la segunda cruz. Resultando el equivalente a $\pi^2 = 10$ veces la unidad.

Milla (1983) afirma que, con respecto a la representación de medidas de longitud y pesas, el uso del cuerpo humano fue esencial para desarrollar varias actividades. Los dedos de la mano son considerados como uno de los primeros instrumentos para medir la longitud y el volumen de las cosas, por ejemplo, comúnmente, los dedos se usaban para la medición de las madejas de hilo o para trazar líneas de esa proporción. Por otro lado, dependiendo del volumen y la longitud de lo que se requería medir se usaba otras partes del cuerpo, por ejemplo, el puktuy o entre manos servía ya para medir porciones de granos, harinas y otros, o T'aqla chaki o palma de pie, que servía para separar los surcos entre cada sembrío o para los canales de riego. Además del cuerpo humano, era muy común usar instrumentos como sacos o vasijas con el objetivo de calcular proporciones más grandes.

Montaluisa (2010) expone que, en la aritmética, también se ha demostrado que los pueblos andinos podían hacer cálculos matemáticos, pues, en primer lugar, dentro de su lenguaje existe una denominación para la acción de sumar (Yapana), restar (quichuy), multiplicar (miray) y dividir (rakiy). Por otro lado, existen evidencias arqueológicas del uso de instrumentos hechos de tabla o piedra, que servían, principalmente para calcular diferentes operaciones y equitativamente resolver la distribución de bienes y productos agrícolas, la contabilización de los censos, la organización las labores de la mita, el registro de información de astronomía y del calendario, entre otras (Montaluisa, 2010). Los incas y los cañaris son los pueblos andinos más reconocidos por su creación de tablas para el cálculo de operaciones aritméticas, y que obtenían resultados muy exactos. A continuación, por fines planteados en la presente investigación, ampliaremos un poco los saberes matemáticos de los cañaris y los incas y su contribución a la racionalidad matemática.

Incas

Unos de los grandes aportes a la ciencia de la matemática, provienen de los incas, el Tawantinsuyo, que abarcaba los territorios de lo que hoy conocemos como Colombia, Ecuador, Perú, Chile, Argentina y Bolivia. En el campo de la matemática los incas destacaron principalmente por su capacidad de cálculo en el ámbito económico, además, disminuyeron la complejidad de hacer cuentas con grandes cantidades a través del uso de instrumentos de cálculo (Huapaya y Salas, 2008).

De acuerdo Huapaya y Salas (2008), para calcular grandes cantidades, los incas utilizaron, principalmente, dos instrumentos: El Quipu y la Yupana. Según Pareja (1986), el quipu (palabra quechua que significa “nudo”), se encuentra documentado por primera vez en las crónicas de

Guaman Poma de Ayala, en las cuales se pueden observar a varios incas haciendo nudos sobre las cuerdas (Figura 1).

Figura 1

Crónicas Guaman Poma de Ayala sobre los quipus



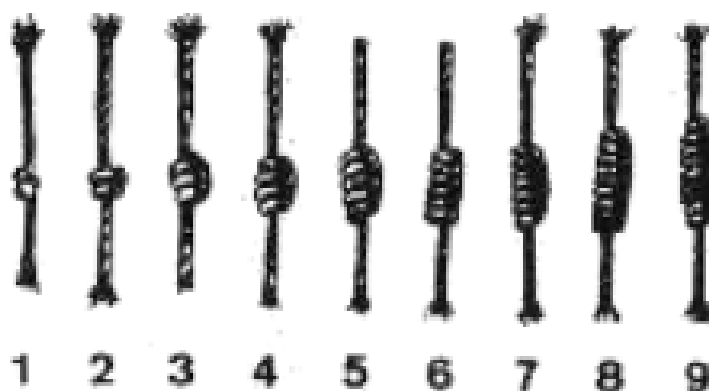
Nota. Registros gráficos de Guaman Poma de Ayala sobre el uso de quipus. Tomado de las crónicas de Guaman Poma Ayala [Fotografía], por Guaman Poma Ayala, 1992. CC BY 2.0.

También, se describe en las mismas crónicas que el quipu estaba conformado por una cuerda transversal muy gruesa que media aproximada de 10 cm a 3 m, de la cual se desprendían otras cuerdas en las que se realizaban los nudos de acuerdo a la cantidad que se deseaba representar. En las cuerdas colgantes se encontraban nudos de distintas formas, que representaban los valores de cada cantidad numeral (Figura 2). Era necesario que la separación entre cada número representado sobre la cuerda, tenga la misma longitud, pues para representar el número cero, se dejaba vacío el lugar de representación. De acuerdo con, Micelli y Crespo (2012), los quipus eran manejados por los quipucamayos, que eran personas instruidas desde que eran pequeños, para aprender el oficio de interpretar y manejar los nudos de las cuerdas.

Comúnmente, los quipucamayos registraban en los quipus información de datos estadísticos relacionados con los censos poblacionales, la contabilidad tributaria, los ingresos económicos y los bienes del imperio Inca. El registro estadístico de las riquezas mencionadas anteriormente, servía directamente para sostener la gobernabilidad del pueblo incario. Además del registro de los bienes, los quipus también servían para el cálculo de cantidades, especialmente para sumar cantidades.

Figura 2

Los Nudos del Quipus



Nota. Representación numérica en los quipus. Tomado de Los quipus [Fotografía] por Luque, Mora y Torres, 2005. CC BY 2.0.

Dentro del imperio Inca, surgió otro instrumento matemático además de los Quipus, y fue la Yupana, un instrumento suplementario al quipu. Una de las primeras representaciones de la Yupana se encuentra en las crónicas de Guaman Poma Ayala, en la que se muestra en la esquina inferior izquierda un dibujo de una tabla de forma rectangular que cuenta con 20 compartimentos, dispuestos en cuatro columnas y cinco filas, provistas de piedras, maíces o fichas; las columnas

estaban orientadas de derecha a izquierda y distribuidas en grupos de 1, 2, 3 y 5 agujeros, como se puede observar en la siguiente imagen (Figura 3).

Figura 3

La Yupana y el Quipu



Nota. Registro gráfico de Guaman Poma de Ayala sobre la Yupana. Tomado de las crónicas de nueva crónica y buen gobierno [Fotografía], por Guama Poma de Ayala, 1992. CC BY 2.0.

Tanto el Quipu como la Yupana le dotó al imperio Inca una metodología sencilla pero efectiva, para realizar cálculos matemáticos y para registrar los conteos realizados de sus riquezas con el fin de tener una mejor organización gubernamental del imperio Inca Tawantinsuyo. Además, dentro de su sistema decimal, ya existía una concepción del cero, si bien no existía una cifra específica para el cero, el vacío en los Quipus o en la Yupana representaba que en esa posición no había ningún valor.

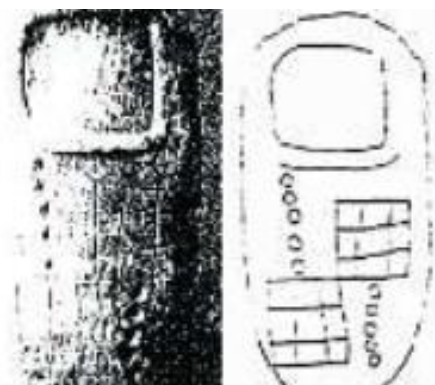
Cañaris

Los cañaris, se estableció en el territorio del actual Ecuador, en la provincia del Cañar y partes de las de Azuay, Chimborazo, Loja, Morona Santiago, El Oro y Guayas. Dentro de esta

cultura sobresale la invención de la Taptana cañari, un instrumento usado para el cálculo de operaciones matemáticas. De acuerdo con Alquina (2020), las Taptanas encontradas en el territorio ecuatoriano contienen un cuadrado superior, dos matrices cuadradas de tres filas y tres columnas, ubicados de extremo a extremo y dos filas con cinco agujeros cada uno ubicados de extremo a extremos en cada esquina de la tabla como se evidencia en la figura 4. La función matemática de la Taptana cañari aún no ha sido interpretado totalmente. De acuerdo a múltiples investigaciones, parece que podían facilitar cálculos matemáticos, como la suma, la resta, la multiplicación y la división con grandes cifras, empleando granos o piedras; que se colocaban en los casilleros y agujeros.

Figura 4

Taptana Cañari



Nota. Taptana en piedra y dibujo de la Taptana cañari. Tomado de la Taptana cañari [Fotografía], por Butsch, Calero y Muenala, 1998. CC BY 2.0.

A partir de la época colonial, se introdujeron nuevos sistemas de expresión y lógica ajenos al contexto andino, a fin de reorganizar la población y los recursos de los Andes. Esta reorganización implicó un proceso de adoctrinamiento e imposición de metodologías ya que al

parecer, presuntamente las personas indígenas contaban anteriormente con sus propios sistemas de enseñanza, es decir, los colonizadores instruyeron a las personas indígenas con el idioma castellano, la religión cristiana, las normas sociales y la racionalidad matemática occidental junto con la forma de llevar sus cuentas, a partir de ello, se dejó de lado los instrumentos matemáticos andinos (D'Ambrosio, 2008).

1.2.1. Aportes matemáticos de la cultura andina

Según Dussel (2003), el extenso proceso de descolonización, iniciado hace doscientos años en América con la independencia política, ha llegado en las últimas décadas, hasta un intento de descolonización del pensamiento racional. De acuerdo al mismo autor, en estas últimas décadas, se evidencia una mayor fuerza romper la tendencia en que las metodologías occidentales para aprender matemáticas son únicas. Ahora bien, se conoce que todas las culturas, sin excepción, desarrollaron el lenguaje y la matemática con recursos propios de los lugares a los que pertenecían, pues, para cada cultura surge la necesidad de contabilizar, de agrupar, de operar, para tener una mejor organización de sus bienes y riquezas. Los pueblos americanos andinos prehispánicos no fueron la excepción, pues también tuvieron cuantiosos avances matemáticos, algunos de los cuales se describen a continuación:

- La abstracción del número cero y su representación simbólica. Dentro de la cultura andina, el cero fue indispensable para comprender su numeración y su sistema posicional.
- El sistema posicional de los andes fue decimal, y se evidencia directamente en la articulación numérica del lenguaje, es decir, al llegar al número once, no se creó una

nueva denominación o nombre para ese número, sino que se compuso el nombre del once con el diez y el uno.

- Los cálculos matemáticos de las culturas andinas prehispánicas fueron muy aproximadas a los cálculos realizados actualmente, un ejemplo son los cálculos astronómicos de los ciclos lunares y solares y los resultados obtenidos al realizar operaciones básicas.

- Las múltiples estructuras de edificaciones de las culturas andinas prehispánicas representan el uso de las matemáticas, pues para planificar y levantar las grandes construcciones que perduran en la actualidad, se cree que fue indispensable el cálculo de operaciones matemáticas.

- Los Incas tenían una metodología que les permitía registrar cantidades y representar números mediante un sistema de numeración decimal posicional, conformado por un conjunto de cuerdas en las que se encontraban unos nudos que denominaban Quipus.

- Los ábacos y tablas de conteo, que a base de materiales propios del lugar eran usados para realizar operaciones matemáticas de grandes cantidades, que en muchos casos eran graficados mediante piedra o anudados en cuerdas.

- Las culturas de los andes, desarrollaron un sistema geométrico proporcional de medidas, basado en la estrella de sur, y el ángulo formado por la alineación de las estrellas en las noches de solsticios, de igual forma se cree, que sus matemáticas empezaron a desarrollarse a partir de la observación astronómica.

- La representación de medidas de longitud y peso, se realizó mediante el uso del cuerpo humano y de herramientas. Los dedos de la mano son considerados como uno de los primeros instrumentos para medir la longitud y el volumen. Sin embargo, si la



cantidad a medir tenía un volumen y la longitud mucho mayor, se requería otras partes del cuerpo, por ejemplo, el puktuy o entre manos servía ya para medir porciones de granos, harinas y otros, o T'aqlla chaki o palma de pie, que servía para separar los surcos entre cada sembrío o para los canales de riego. Por último, era muy común, usar instrumentos como sacos o vasijas con el objetivo de calcular proporciones incluso más grandes.

CAPÍTULO 2

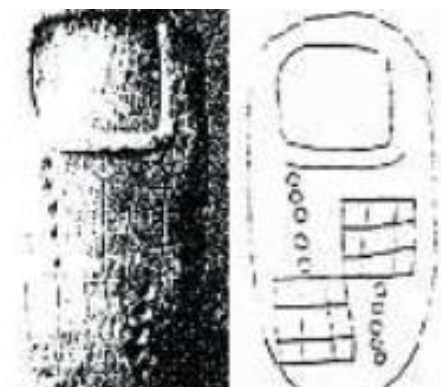
La Taptana y la Yupana

2.1. Breve reseña histórica sobre Taptana

El origen de la Taptana se remonta a la cultura cañari que se desarrolló en Ecuador, en los territorios actuales de la provincia del Cañar y ciertas partes de las provincias de Azuay, Chimborazo, Loja, Morona Santiago, El Oro y Guayas. Alquina (2020), menciona que dentro de los restos arqueológicos hallados en asentamientos cañaris (fase Tacalzhapa, 500 a.C.) se encontró un hallazgo peculiar, una piedra rectangular de aproximadamente 38x25 centímetros, que llevaba inscritas hileras laterales de diez orificios circulares y dos matrices con casilleros subdivididos en nueve cuadrados, a la que se le dio el nombre de contador cañari o Taptana cañari (Figura 5). La piedra original hallada en territorio cañari se guarda en el Museo Jijón y Caamaño de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador (PUCE), lamentablemente no se encuentra en exposición porque es una pieza única en su especie (Alquina, 2020).

Figura 5

Taptana





Nota. Taptana en piedra y dibujo de la Taptana. Tomada de la Taptana [Fotografía], Butsch, Calero y Muenala, 1998. CC BY 2.0.

Vásquez (2020) menciona que, una de las primeras evidencias teóricas sobre la Taptana, se encuentra en el libro “Taptana o el ajedrez de Atahualpa: a los 425 años de Cajamarca”, escrito por el arqueólogo Olaf Holm, en este libro se describe a la Taptana como un juego o instrumento de contabilidad del pueblo cañari. Posteriormente, el historiador Octavio Cordero, descubre algunos algoritmos que permiten realizar cálculos aritméticos sobre la Taptana.

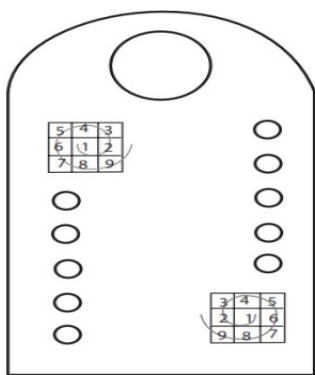
El trabajo de Octavio Cordero es complementado y socializado por un equipo de investigadores del proyecto de Educación Intercultural Bilingüe (EIB), auspiciado por la Cooperación Técnica Alemana (GTZ), el Ministerio de Educación del Ecuador y la PUCE, ese equipo de investigadores, establecieron varias hipótesis de uso de la Taptana cañari. La razón por la que se plantea solamente hipótesis entorno al uso de la Taptana cañari, es porque no es posible descubrir con certeza su uso, ya que, faltan pruebas e indicios suficientes que definan su verdadera función, ya que los cañaris no dejaron un legado escrito (Micelli y Crespo, 2012). Los investigadores de las instituciones mencionadas con anterioridad, realizaron estudios para interpretar la Taptana cañari y adaptarla a la enseñanza de la matemática en los pueblos indígenas del Ecuador, de esta manera, desarrollar una mejor comprensión de ciertos procesos matemáticos de los estudiantes, sobre todo procesos matemáticos abstractos, que promuevan un mejor desempeño académico de los estudiantes (Alquinga, 2020).

Según Valiente y Küper (1998), las investigaciones realizadas por el Centro de Investigaciones para la Educación Indígena (CIEI), concluyeron que la Taptana cañari fue una especie de calculadora para operar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones; es así, que la

definen como una máquina de cálculo que permite comprender el concepto de cantidad y el funcionamiento del sistema decimal. De acuerdo a los mismos autores, los procesos operativos asociados al contador cañari o Taptana cañari, también reflejaban el pensamiento y forma de vida de los cañaris, es decir, hace referencia tanto al cálculo de operaciones como también a la cosmovisión andina y cultural, por ejemplo, para los pueblos andinos el tiempo se representa en espiral, igualmente, para el cálculo dentro de la Taptana se tenía que seguir un orden en espiral de los números de las matrices, como se observa en la figura 6.

Figura 6

Taptana o Contador Cañari



Nota. Orden de los números de las matrices en espiral. Tomada de la Taptana o Contador Cañari [Fotografía], Arriaga, 1965. CC BY 2.0.

Una vez recolectado las hipótesis del CIEI acerca del uso de la Taptana, surgió una de las primeras series de textos para la asignatura de Matemática: “Kaimi ñukanchik Iupai” publicado en 1978, por Humberto Muenala y Gabriel Tarlé (Montaluisa, 2010). En dicho texto se recoge contenidos matemáticos que van desde el conteo hasta el cálculo de operaciones con la utilización

de la Taptana cañari. Según Montaluisa (2010), los textos de Muenala y Tarlé se usaron durante el proceso de alfabetización.

Posteriormente, Montaluisa (2010), se unió al CIEI, y maravillándose por la Taptana cañari propuso modificar la estructura de este instrumento para operar con mayor facilidad. Realizó diseños para los sistemas de base diez, cinco y dos, como se evidencia en la Figura 7. Con lo mencionado anteriormente, Montaluisa (2010), transformó en tarea sencilla la representación de las cantidades en un sistema de numeración posicional, sin emplear colores ni figuras, como inicialmente se planteó por Muenala y Tarla.

Figura 7

Taptana Montaluisa



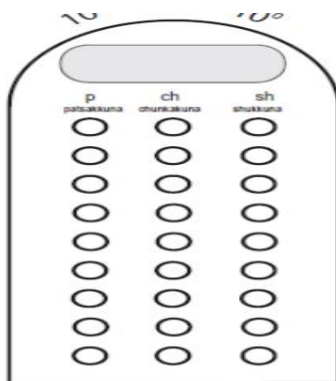
Nota. A la izquierda está la Taptana de base diez. En el centro la Taptana de base cinco. A la derecha está la Taptana de base dos. Tomada de la Taptana Montaluisa [Fotografía], Montaluisa, 2010. CC BY 2.0.

El diseño final de la Taptana Montaluisa de base diez, es la que usualmente se usa en los centros educativos. La Taptana Montaluisa se conforma de columnas de nueve agujeros, donde cada columna representa a las unidades, decenas, centenas, unidades de mil, y así sucesivamente,

como se muestra en la Figura 8. El material con el que es elaborado las Taptanas Montaluisa, son de madera, plástico e incluso con material reciclado. Así mismo, el número de columnas aumenta de acuerdo a la cantidad de números que se requiera representar, por ejemplo, para representar unidades de mil, se requerirá cuatro columnas, decenas de mil se requerirá cinco columnas, y así sucesivamente.

Figura 8

La Taptana Montaluisa



Nota. El diseño de la Taptana Montaluisa en el papel. Tomada de la Taptana Montaluisa en papel [Fotografía], por Montaluisa, 2010. CC BY 2.0.

El matemático Marco Vinicio Bernal junto a la Organización Iberoamericana para la Educación y la Cultura (OEI) y la Universidad Nacional de Educación (UNAE), realizó una nueva modificación pedagógica para la Taptana, en el 2015, sujetándose a los criterios de identidad que representan al pueblo cañari y la denominaron Taptana UNAE. La construcción de la Taptana UNAE fue sobre piedra cumpliendo las siguientes directrices:

1. La forma de la tabla de piedra asemejaba a un caparazón de tortuga.

2. Las concavidades pequeñas se agrupaban de nueve en nueve y se alineaban en forma de culebras, denominándolas leoquinas.
3. La concavidad mayor estaba ubicada en el centro de la tabla de piedra y tenía la forma de la luna, diosa mayor de la cultura cañari.
4. La tabla se dividió en cuatro partes, recordando que la matemática de los Cañaris, responde al tiempo y al espacio.
5. En cada cuadrante había dos leoquinas.
6. La Taptana UNAE construida por Marco Vinicio Bernal tenía eje mayor de 113 cm, un menor de 88 cm y un ancho de 11 cm como se evidencia en la figura 9.

Figura 9

Taptana UNAE



Nota. Estructura de la Taptana UNAE, diseñada por el matemático Marco Vinicio Bernal. Tomado de la Taptana Cañari, conocimiento integral [fotografía], por Vinicio, 2020.

Según Guznay (2017), las adaptaciones realizadas a la Taptana para la educación son importantes porque permiten recuperar, demostrar y revalorar la lógica y la cosmovisión andina desarrollada por el pueblo cañari; que, por extensión, puede abarcar a los pueblos norandinos y de

ascendencia quechua. Además, puede facilitar mediante su uso, el aprendizaje de conceptos abstractos de la ciencia matemática.

2.1.1. Importancia de la Taptana como material didáctico

El uso la Taptana cañari, la Taptana Montaluisa y la Taptana UNAE para el aprendizaje de las matemáticas, presenta un importante aporte a la comprensión de la lógica del sistema decimal y de las operaciones matemáticas. Su metodología facilita el paso de lo concreto a lo abstracto, el desarrollo de un pensamiento activo y autónomo, la comprensión del sistema de numeración decimal, la elaboración de nociones de cantidad, el desarrollo de la inteligencia lógica matemática mediante la manipulación de material concreto y el aprendizaje efectivo de las operaciones matemáticas básicas (Alquinga, 2020). Además, Alquinga (2020) menciona que, es indispensable difundir la utilización de recursos educativos como la Taptana, pues su valor contribuye tanto en el campo educativo como el cultural, pues con el uso de la Taptana se reconoce la ciencia producida por las culturas ancestrales del territorio ecuatoriano, destacando los conocimientos de las culturas aborígenes y promoviendo la revalorización de los conocimientos matemáticos cañari.

2.1.2. Funciones matemáticas de la Taptana

De acuerdo con Alquinga (2020), la Taptana Cañari, Montaluisa y UNAE cumple varias funciones para la enseñanza - aprendizaje de los estudiantes, algunas de las más importantes son:

1. La estimulación y la motivación del aprendizaje en los estudiantes.
2. La enseñanza activa, creativa y participativa de los estudiantes.
3. El reconocimiento de las nociones de cantidad, incluyendo el número cero.
4. La comprensión del valor posicional de unidades, decenas, centenas; unidades de mil, etc.

5. El cálculo de operaciones aritméticas como la suma, resta, multiplicación y división, con y sin reagrupación
6. La comprensión de procesos de secuenciación.

2.1.3. La Taptana en la enseñanza de la suma y resta

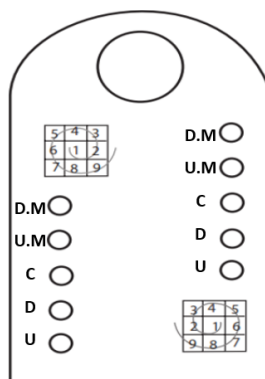
Como se indicó en la parte superior, según Alquina (2020), una de las funciones de la Taptana es facilitar el cálculo de las cuatro operaciones básicas, pero, para propósitos de este trabajo solamente se abordará dos de las operaciones básicas: la suma y la resta. A continuación, se describe la forma de realizar cálculos de suma y resta utilizando en primer lugar la Taptana cañari, a continuación, la Taptana Montaluisa y, por último, la Taptana UNAE.

2.1.3.1 La suma y la resta con la Taptana cañari

Antes de explicar cómo realizar la suma y la resta con la Taptana cañari, es importante conocer los elementos que conforma esta Taptana, los cuales se presentan en la Figura 10. Como se puede observar, la tabla tiene forma rectangular, en la parte superior hay un círculo que representa la ausencia numérica e indica el cambio en el valor posicional. También tiene dos matrices de 9x9, numerados en forma de espiral. En los laterales de la tabla hay círculos donde se colocará y diferenciará cada posición del número.

Figura 10

Taptana o Contador Cañari



Nota. Tabla con representación similar a la tabla original cañari, explicada brevemente cada una de sus partes. Tomada de la Taptana o Contador Cañari [Fotografía], Arriaga, 1965. CC BY 2.0.

La suma sin reagrupación y con reagrupación

Para realizar una *suma sin reagrupación* con la Taptana cañari se sigue los siguientes pasos:

1. Se coloca en los círculos laterales de la Taptana cañari, desde abajo hacia arriba, un material representativo para diferenciar el valor posicional de cada número, usualmente se usa semillas o piedras de distintos colores. Por ejemplo, para las unidades se puede usar una semilla de maíz, para las decenas, una semilla de canguil, para las centenas una semilla de haba, y así sucesivamente (ver Figura 11).

Figura 11*La Taptana Cañari*

Nota. La Taptana cañari con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

2. A continuación, se representan las dos cantidades que se requiera sumar en las matrices de 9x9. Para representar dichas cantidades, se usarán las semillas y se colocará cada semilla sobre el número en la matriz indicando su valor posicional. Por ejemplo, si se desea representar los números 28 y 11 para posteriormente sumarlos, se colocará dentro de la primera matriz un canguil que representará las decenas en el número dos y un maíz que representará las unidades en el número ocho, así mismo, en la segunda matriz, se colocará un canguil que representará las decenas en el número uno y un maíz que representará las unidades en el uno (ver Figura 12).

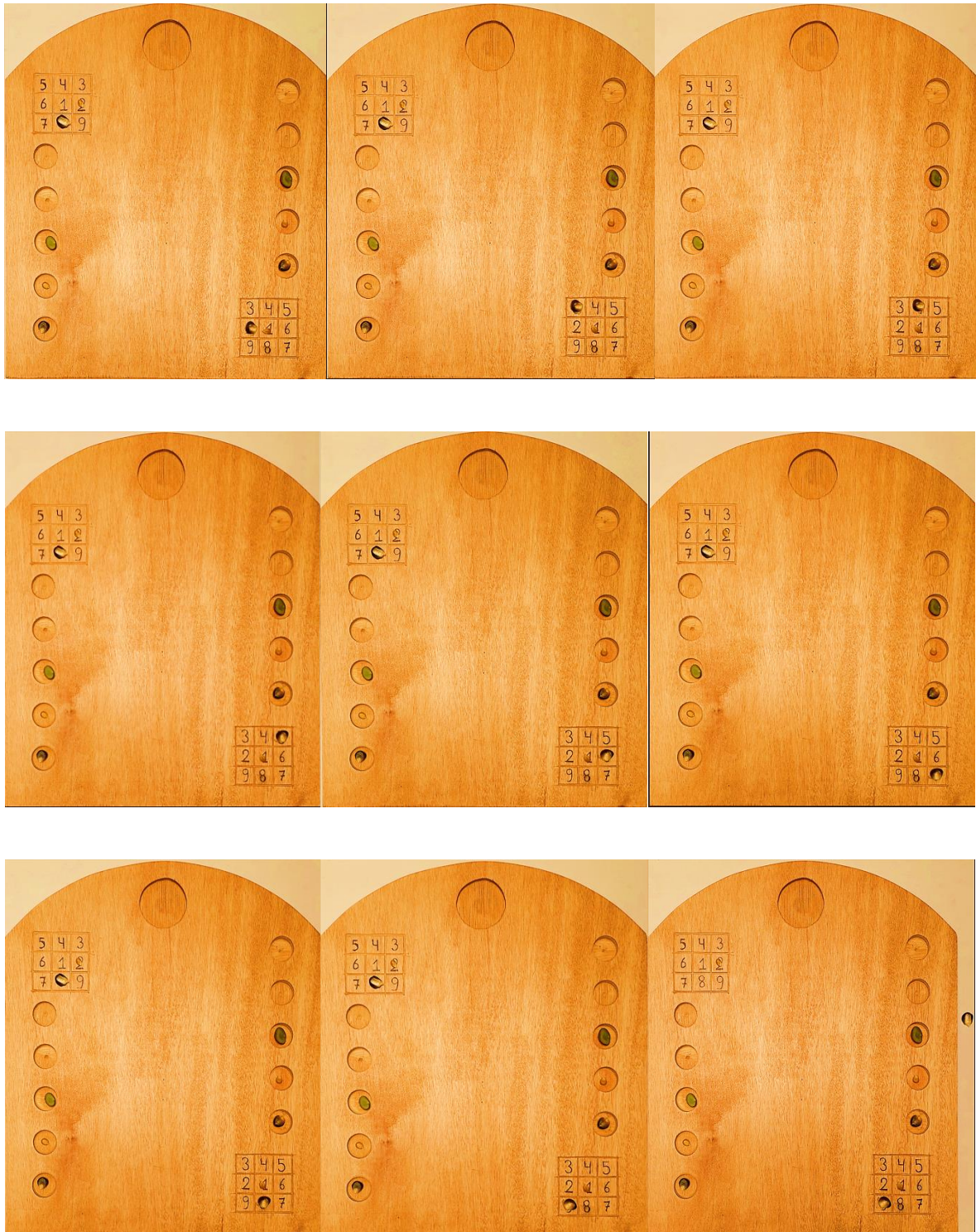
Figura 12*La Taptana Cañari*

Nota. La Taptana cañari con la representación de los números 28 y 11 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

3. Se comienza a operar desde las unidades, para ello, se verifica el número de unidades de la primera matriz, pues dicho número indicará la cantidad de unidades que hay que recorrer en la segunda matriz, a partir de la posición de la unidad del segundo número. Por ejemplo, la primera matriz representa ocho unidades, que indica el número de espacios a recorrer en la segunda matriz, empezando desde el número de unidades que indica la segunda matriz, en el caso del ejemplo dado sería una unidad. Al recorrer la posición de la segunda matriz (ver el recorrido en los gráficos de la Figura 13), el maíz que representaba las unidades quedará posicionado en el número nueve, mientras que las unidades de la primera matriz que eran ocho son retiradas, puesto que ya se los añadió en la segunda matriz.

Figura 13

La Taptana Cañari



Nota. Secuencia del movimiento de las semillas que representan las unidades al realizarse la suma entre 28 y 11. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

4. A continuación, se procede a operar con las decenas, para ello se usa la misma metodología empleada con las unidades, por ejemplo, en la primera matriz está el canguil en la posición dos (que indica dos decenas), este número indicará cuántos espacios recorrer en la segunda matriz, así, la posición de la segunda matriz era uno (que indica una decena) y luego de recorrer los dos espacios quedaría el número tres que indica tres decenas), se retira el canguil de la primera matriz (ver Figura 14).

Figura 14

La Taptana Cañari



Nota. Secuencia del movimiento de las semillas que representan las decenas al realizarse la suma entre 28 y 11. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

5. La respuesta es la cantidad que queda representada en la segunda matriz, en este ejemplo, un maíz, que representaba las unidades en el número nueve y un canguil, que representaba las decenas, en el número tres, es decir, el resultado es 39 (ver Figura 15).

Figura 15*La Taptana Cañari*

Nota. La Taptana cañari con la representación del 39 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

La *suma con reagrupación*, se opera de la siguiente forma:

1. Se coloca en los círculos pequeños laterales de la tabla, desde abajo hacia arriba, un material representativo para diferenciar entre cada posición del número, al igual que para la suma sin reagrupación, en este ejemplo colocaremos para las unidades una semilla de maíz, para las decenas una semilla de poroto y para las centenas un haba (ver Figura 16).

Figura 16*La Taptana Cañari*

Nota. La Taptana cañari con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

2. Se representa las cantidades a operar dentro de las dos matrices, por ejemplo, para sumar $23 + 48$, en la primera matriz se coloca un maíz en la posición tres (que representa tres unidades) y un poroto en la posición dos (que representa dos decenas). En la segunda matriz se coloca un maíz en la posición ocho (que representa ocho unidades) y un poroto en la posición cuatro (que representa cuatro decenas; ver Figura 17).

Figura 17*La Taptana Cañari*

Nota. La Taptana cañari con la representación de los números 23 y 48 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

3. Se comienza a operar por las unidades. En la primera matriz las unidades son tres, entonces se recorrerá tres espacios de la segunda matriz, iniciando desde las ocho unidades de la segunda matriz, este caso al recorrer un espacio se cae en el espacio nueve, el último número de la matriz, entonces, para seguir recorriendo los dos espacios que faltan se avanza la semilla de maíz hasta el círculo grande de la tabla que representa el cero, cuando caes en este espacio significa que ya se alcanzó una decena, por lo que el poroto de la segunda matriz recorre un espacio, y para recorrer el último espacio de maíz, se inicia desde el principio de la segunda matriz, que es el número uno. Retiramos las unidades de la primera matriz (ver Figura 18).

Figura 18

La Taptana Cañari



Nota. Secuencia del movimiento de las semillas que representan las unidades al realizarse la suma entre 23 y 48. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

4. A continuación, se procede a operar las decenas. En la segunda matriz, se recorre los dos espacios (que es el número de decenas que indica la primera matriz) a partir del número cinco (que es el número de decenas que indica la segunda matriz) (Figura 19).

Figura 19

La Taptana Cañari



Nota. Secuencia del movimiento de las semillas que representan las decenas al realizarse la suma entre 23 y 48. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

5. El resultado queda representado de la siguiente manera: un maíz, que representa las unidades, en la posición uno; y un poroto, que representa las decenas, en la posición siete, indicando al 71 como respuesta (ver Figura 20).

Figura 20

La Taptana Cañari



Nota. La Taptana cañari con la representación del 71 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

La resta sin reagrupación y con reagrupación

Para realizar una *resta sin reagrupación* se sigue los siguientes pasos:

1. Se coloca en los círculos pequeños laterales de la Taptana cañari, desde abajo hacia arriba, un material representativo para diferenciar entre cada posición del número, al igual que en

los ejemplos de la suma, se coloca una semilla maíz para las unidades, una semilla de poroto para las decenas, una semilla de haba para las centenas, y así sucesivamente (Figura 21)..

Figura 21

La Taptana Cañari



Nota. La Taptana cañari con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

2. Se representa las dos cifras a restar respectivamente en cada matriz, por ejemplo, para restar $45-13$, se colocará el minuendo en la primera matriz, representándolo con un maíz en la posición cinco y un poroto en la posición cuatro; en la segunda matriz se colocará el sustraendo, representándolo con un maíz en la posición tres y un poroto en la posición uno (Figura 22).

Figura 22*La Taptana Cañari*

Nota. La Taptana cañari con la representación de los números 43 y 13 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

3. Se empieza a operar por las unidades. A diferencia de la suma, las posiciones de la segunda matriz serán las que indiquen cuánto se retrocederá en la primera matriz. En el ejemplo dado, la posición de las unidades de la segunda matriz es tres, por ende, ese será el número de espacios a retroceder en la primera matriz, iniciando en la posición cinco del maíz de la primera matriz, se retrocede tres espacios y se retira el maíz de la segunda matriz (Figura 23).

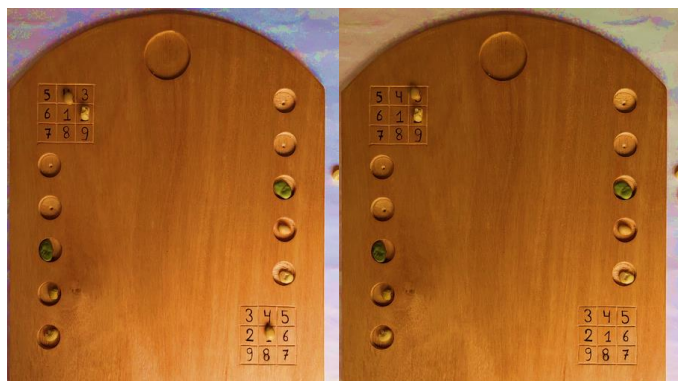
Figura 23*La Taptana Cañari*

Nota. Secuencia del movimiento de las semillas que representan las unidades al realizarse la resta entre 43 y 13. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

4. A continuación, se procede con las decenas, de la misma forma que se realizó con las unidades, el poroto de la segunda matriz, que se encuentra en la posición uno indicará que se debe retroceder un espacio de la primera matriz, iniciando desde la posición cuatro, se retrocede un espacio de la primera matriz y se retira el poroto de la segunda matriz (Figura 24).

Figura 24

La Taptana Cañari



Nota. Secuencia del movimiento de las semillas que representan las decenas al realizarse la resta entre 43 y 13. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

5. El resultado se refleja en la primera matriz, en este caso el maíz, que representa las unidades, se encuentra en la posición dos y el poroto que representa las decenas, se encuentra en la posición tres, dando como resultado 32 (Figura 25).

Figura 25

La Taptana Cañari



Nota. La Taptana cañari con la representación del 32 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

Con respecto a la *resta con reagrupación*, se opera de la siguiente forma:

1. Se coloca en los círculos pequeños laterales de la Taptana cañari, desde abajo hacia arriba, un material representativo, para ejemplificar usamos una semilla maíz para las unidades y una semilla de poroto para las decenas (Figura 26).

Figura 26

La Taptana Cañari



Nota. La Taptana cañari con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

2. Se representan las dos cantidades a operar dentro de cada matriz respectivamente, por ejemplo, 32-17, se representa en la primera matriz el minuendo colocando un maíz en la posición dos y un poroto en la posición tres; en la segunda matriz se representa el sustraendo colocando un maíz en la posición siete y un poroto en la posición uno (Figura 27).

Figura 27*La Taptana Cañari*

Nota. La Taptana cañari con la representación de los números 32 y 17 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

3. Se empieza a operar por las unidades, en este ejemplo, hay siete unidades en la segunda matriz, por lo que se retrocederá siete espacios en la primera matriz, al retroceder uno de los siete espacios en la primera matriz, se cae en la posición uno, para seguir recorriendo avanzamos un espacio más y colocamos el maíz en el círculo superior del cero. Cuando una semilla llega a esta posición la siguiente posición decimal, en este caso las decenas debe retroceder un puesto, entonces retrocedemos un espacio el poroto en la primera matriz, quedando en la posición dos. Una vez recorrido los dos primeros espacios, quedan cinco más por recorrer, en este caso se inicia el recorrido por el número nueve y se retrocede hasta llegar al cinco. Finalmente se retira el maíz de la segunda matriz (Figura 28).

Figura 28

La Taptana Cañari

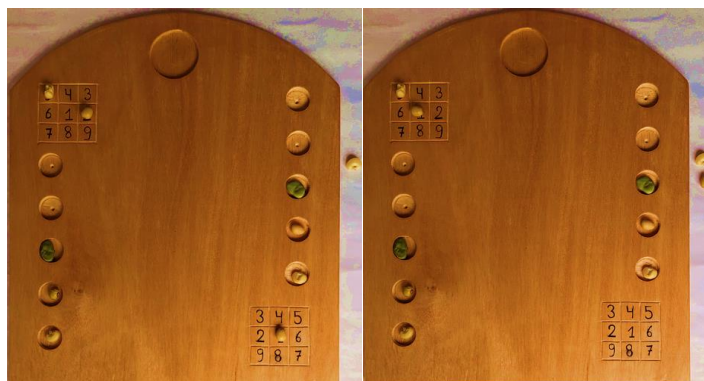


Nota. Secuencia del movimiento de las semillas que representan las unidades al realizarse la resta entre 32 y 17. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

4. Se procede con las decenas, el poroto de la primera matriz retrocede un puesto quedando en la posición uno, que indica una decena. Se retira el poroto de la segunda matriz (Figura 29).

Figura 29

La Taptana Cañari



Nota. Secuencia del movimiento de las semillas que representan las decenas al realizarse la resta entre 32 y 17. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

5. La respuesta se refleja en la primera matriz, en este caso un maíz en la posición cinco y un poroto en la posición uno, dando como resultado 15 (Figura 30).

Figura 30*La Taptana Cañari*

Nota. La Taptana cañari con la representación del 32 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

2.1.3.2. La suma y resta con la Taptana Montaluisa

Como se observa en la Figura 31, la Taptana Montaluisa, consta de una tabla con un círculo superior, en donde se representa la ausencia de cantidades numéricas. Cuenta con cuatro columnas de nueve círculos, cada una de ellas representa un valor posicional, comenzando por las unidades a la derecha.

Figura 31*La Taptana Montaluisa*

Nota. La Taptana Montaluisa. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

La suma sin reagrupación y con reagrupación

La suma *sin reagrupación* con la Taptana Montaluisa se realiza desde abajo hacia arriba y de derecha a izquierda, de acuerdo a los siguientes pasos:

1. Se establece para cada valor posicional una representación con material tangible, estas pueden ser semillas, piedras de colores, mullos, etc. Por ejemplo, se coloca para las unidades una semilla de maíz, para las decenas una semilla de poroto y para las centenas una semilla de haba (Figura 32).

Figura 32

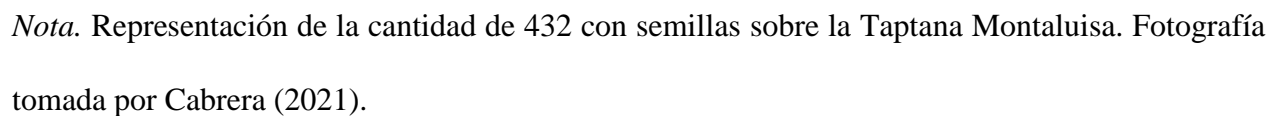
La Taptana Montaluisa



Nota. La Taptana Montaluisa con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

2. Se representan los números a ser sumados. Por ejemplo, si se requiere sumar $432+211$; primero, se representa el primer sumando colocando cada semilla dentro de los círculos pequeños desde abajo hacia arriba, en este caso, sería dos semillas de maíz en la primera columna de las unidades, tres semillas de poroto en la segunda columna de las decenas y cuatro semillas de haba en la tercera columna de las centenas (Figura 33).

La Taptana Montaluise



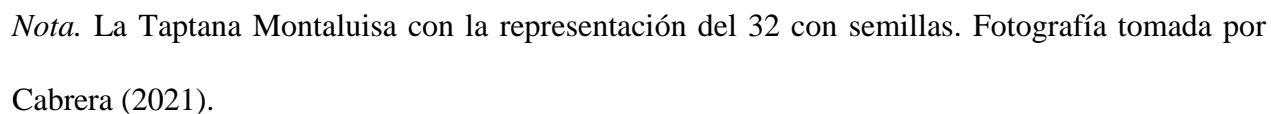
- 64

Figura 34*La Taptana Montaluisa*

Nota. Secuencia de la suma entre $432+211$ con la Taptana Montaluisa. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

4. Se cuenta de derecha a izquierda el número de semillas que quedó en cada columna. De acuerdo al ejemplo quedan tres maíces en la columna de las unidades, cuatro porotos en la columna de las decenas y seis habas en la columna de las centenas, resultando 643 (Figura 35).

La Taptana Montaluise



Con respecto a la suma *con reagrupación*, es necesario seguir los siguientes pasos:

1. Se establece para cada valor posicional una representación con material tangible, en este caso también se colocará para las unidades una semilla de maíz, para las decenas una semilla de poroto y para las centenas una semilla de haba (Figura 36).

Figura 36*La Taptana Montaluisa*

Nota. La Taptana Montaluisa con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

2. Se representa la primera cifra del sumando en los círculos pequeños y el segundo sumando se lo adjunta en los círculos pequeños que quedan vacíos. Por ejemplo, si se quiere operar $264+127$, se representa el primer sumando colocando cada semilla desde abajo hacia arriba, dependiendo de cada posición, en este ejemplo, se representa el primer sumando como cuatro semillas de maíz en la primera columna de las unidades, seis semillas de poroto en la segunda columna de las decenas y dos semillas de haba en la tercera columna de las centenas (Figura 37).

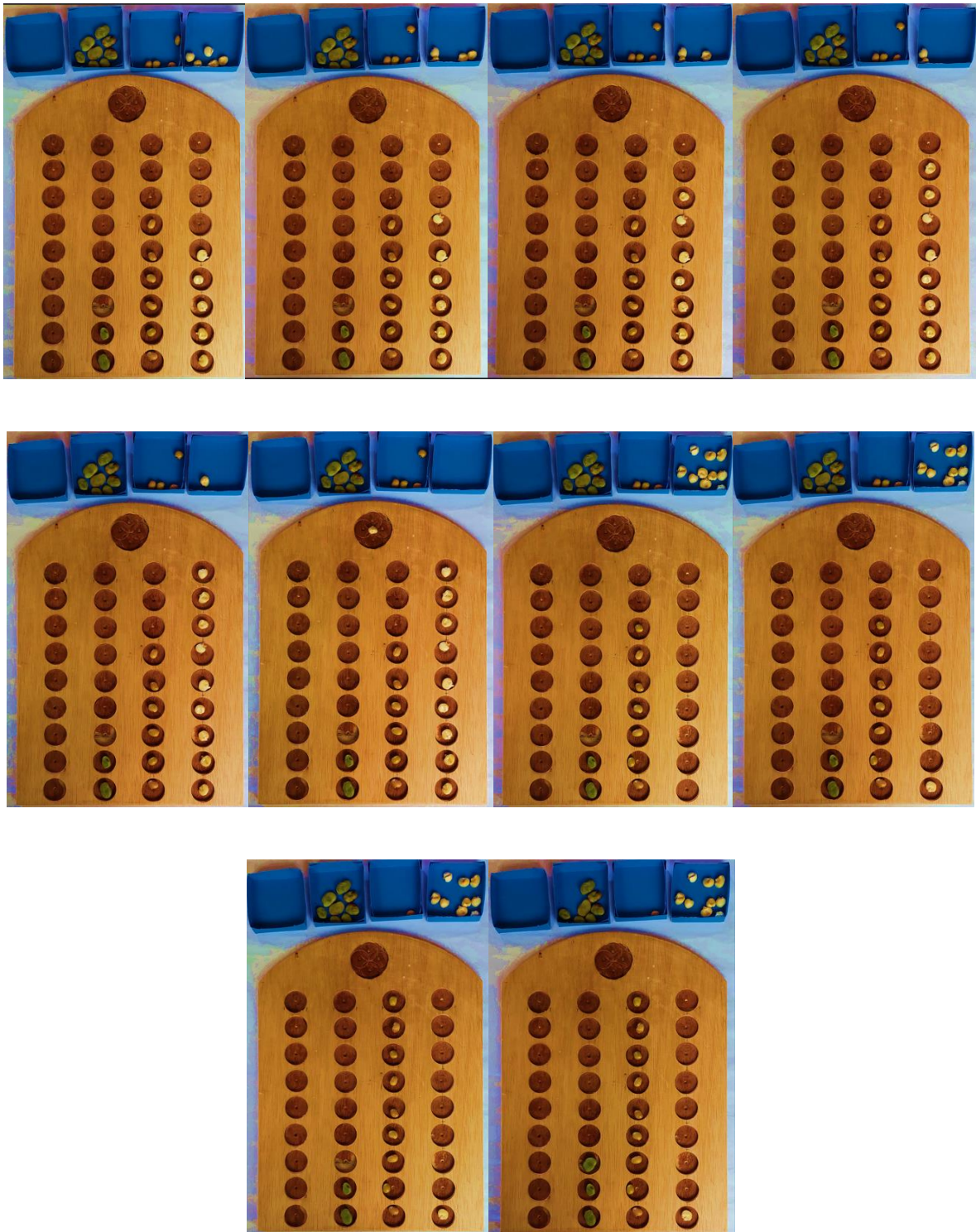
Figura 37*La Taptana Montaluisa*

Nota. Representación de la cantidad de 264 con semillas sobre la Taptana Montaluisa. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

3. Se representa el segundo sumando en los espacios vacíos de cada columna, sin embargo, al colocar el segundo sumando se puede ver que no queda espacio ya que los seis círculos que quedaban vacíos, después de colocar el primer sumando, ya se completaron, por lo que se coloca una semilla en el círculo superior que representa el cero, y se retira las semillas de la columna de las unidades, pues ya han completado una decena. Dicha decena se representa añadiendo un poroto en la fila de las decenas. La unidad restante se coloca en el círculo inferior de la columna de las unidades. A continuación, se añade dos semillas más de poroto (que representan a las dos decenas de segundo sumando) en la columna de las decenas y una semilla de haba en la tercera columna de las centenas (Figura 38).

Figura 38

La Taptana Montaluisa



Nota. Secuencia de la suma entre $264+127$ con la Taptana Montaluisa. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

4. Se cuenta de derecha a izquierda el número de semillas que quedó en cada columna. De acuerdo al ejemplo queda un maíz en la columna de las unidades, nueve porotos en la columna de las decenas y tres habas en la columna de las centenas, que da como resultado 391 (Figura 39).

Figura 39

La Taptana Montaluisa



Nota. La Taptana Montaluisa con la representación del 391 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

La resta sin reagrupación y con reagrupación

Para realizar una resta *sin reagrupación* con la Taptana Montaluisa se realiza lo siguiente:

1. Se establece una representación con material tangible, para cada valor posicional, para ejemplificar, asimismo se coloca para las unidades una semilla de maíz, para las decenas una semilla de poroto y para las centenas una semilla de haba (Figura 40).

Figura 40

La Taptana Montaluisa



Nota. La Taptana Montaluisa con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

2. Se representa la cifra del minuendo dentro de los círculos pequeños de abajo hacia arriba y a continuación la cifra del sustraendo. Por ejemplo, si se quiere operar $49-11$, se representa el minuendo colocando nueve semillas de maíz en la primera columna de las unidades y cuatro semillas de poroto en la segunda columna de las decenas (Figura 41).

Figura 41

La Taptana Montaluisa



Nota. La Taptana Montaluisa con la representación del 49 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

3. La cifra del sustraendo representará cuanto se disminuirá la primera cantidad (minuendo). Siguiendo el mismo ejemplo, se retira un maíz en la primera columna de las unidades y se retira un poroto en la segunda columna de las decenas (Figura 42).

Figura 42*La Taptana Montaluisa*

Nota. Secuencia de la resta entre 49-11 con la Taptana Montaluisa. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

4. Se cuenta de derecha a izquierda el número de semillas que quedó en cada columna. De acuerdo al ejemplo quedan ocho maíces en la columna de las unidades y tres porotos en la columna de las decenas, lo cual da como resultado 38 (Figura 43).

Figura 43

La Taptana Montaluisa



Nota. La Taptana Montaluisa con la representación del 38 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

Con respecto a la resta *con reagrupación* es necesario realizar lo siguiente:

1. Se establece una representación para cada valor posicional, para ejemplificar, usaremos las representaciones del ejemplo anterior, colocaremos para las unidades una semilla de maíz, para las decenas una semilla de poroto y para las centenas una semilla de haba (Figura 44).

Figura 44

La Taptana Montaluisa



Nota. La Taptana Montaluisa con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

2. Se representa el minuendo dentro de los círculos pequeños y el sustraendo dentro de los círculos pequeños que quedan vacíos. Por ejemplo, si se quiere operar $234-119$, se representa el minuendo colocando cuatro semillas de maíz en la columna de las unidades, tres semillas de poroto en la columna de las decenas y dos semillas de haba en la columna de las centenas (Figura 45).

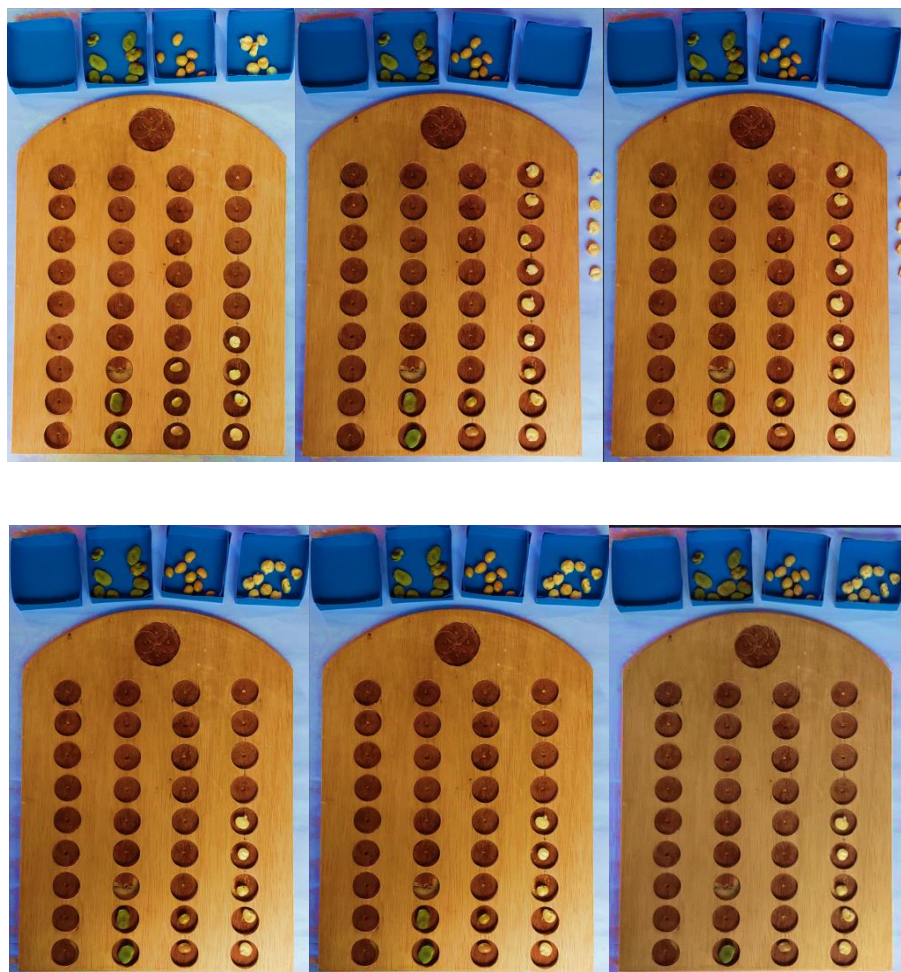
Figura 45*La Taptana Montaluisa*

Nota. La Taptana Montaluisa con la representación del 234 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

3. La cifra del sustraendo representará cuanto disminuirá la primera cantidad representada (minuyendo). Siguiendo el mismo ejemplo, se quiere retirar nueve maíces en la primera columna de las unidades, sin embargo, las unidades del minuendo son solo cuatro. Entonces, pedimos una decena, que son 10 unidades, a la segunda fila, se retira un poroto en la columna de las decenas y se añade 10 maíces en la primera columna, entonces, en la primera columna quedaría 14 maíces, a esa cantidad le retiramos las nueve unidades que requeríamos retirar inicialmente, quedándonos cinco unidades. En la segunda columna tenemos dos porotos y retiramos un poroto del minuendo. Por último, retiramos un haba de la tercera fila (Figura 46).

Figura 46

La Taptana Montaluisa



Nota. Secuencia de la resta entre 234-119 con la Taptana Montaluisa. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

4. Se cuenta de derecha a izquierda el número de semillas que quedó en cada columna. De acuerdo al ejemplo, quedan cinco maíces en la columna de las unidades, un poroto en la columna de las decenas y un haba de la columna de las centenas, resultando 115 (Figura 47).

Figura 47*La Taptana Montaluisa*

Nota. La Taptana Montaluisa con la representación del 115 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

2.1.3.3 La suma y resta con la Taptana UNAE

Como se observa en la figura 48, la Taptana UNAE, consta de una tabla rectangular dividida en cuatro partes, también, cuenta con una concavidad en forma de luna ubicada en el centro de la tabla. En cada cuadrante se encuentran dos hileras en forma de serpiente, denominadas leoquinas. Cada leoquinas cuenta con nueve concavidades menores perfectamente distribuidas y agrupadas para evitar confusiones al momento de operar.

Figura 48*La Taptana UNAE*

Nota. Taptana UNAE realizada con madera. Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

La suma sin reagrupación y con reagrupación

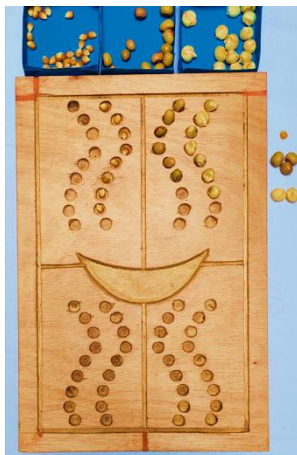
La *suma sin reagrupación* en la Taptana UNAE se realiza desde arriba hacia abajo y se siguen los siguientes pasos.

1. Se establece para cada valor posicional una representación con material tangible, estas pueden ser semillas, piedras de colores, mullos, etc. Por ejemplo, se coloca para las unidades una semilla de maíz, para las decenas una semilla de poroto y para las centenas una semilla de haba (Figura 49).

Figura 49*La Taptana UNAЕ*

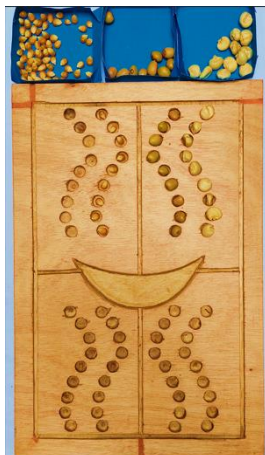
Nota. La Taptana UNAЕ con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

2. Se representan los números a ser sumados. Por ejemplo, si se requiere sumar $867+132$; primero, se representa el primer sumando colocando cada semilla dentro de los círculos pequeños de las leoquinas desde arriba hacia abajo, en este caso, sería siete semillas de maíz en la primera leoquina (desde la izquierda), seis semillas de poroto en la segunda leoquina y ocho semillas de haba en la tercera columna de las centenas. El segundo sumando se representa con las semillas, fuera de la Taptana UNAЕ. En este caso se coloca en la parte lateral izquierda de la tabla, dos semillas de maíz, tres semillas de poroto y una semilla de haba (Figura 50).

Figura 50*La Taptana UNAE*

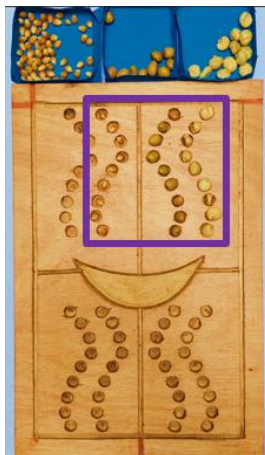
Nota. La Taptana UNAE con la representación del 867 con semillas dentro de la Tabla y la representación del 132 con semillas, fuera de la tabla. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

3. Las semillas del segundo sumando, que estaban fuera de la Taptana UNAE, se colocan dentro de cada leoquina, debajo del primer sumando (Figura 51).

Figura 51*La Taptana UNAE*

Nota. La Taptana UNAE con la representación del 999 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

4. Se cuenta de derecha a izquierda el número de semillas que quedó en cada leoquina. De acuerdo al ejemplo nueve semillas de maíz, nueve semillas de poroto y nueve semillas de haba, resultando 999 (Figura 52)

Figura 52*La Taptana UNAE*

Nota. La Taptana UNAE con la representación del 999 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

Para la *suma con reagrupación* en la Taptana UNAE se siguen los siguientes pasos:

1. Se establece para cada valor posicional una representación con material tangible, estas pueden ser semillas, piedras de colores, mullos, etc. Por ejemplo, se coloca para las unidades una semilla de maíz, para las decenas una semilla de poroto y para las centenas una semilla de haba (Figura 53).

Figura 53*La Taptana UNAE*

Nota. La Taptana UNAE con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

2. Se representan los números a ser sumados. Por ejemplo, si se requiere sumar $642+283$; primero, se representa el primer sumando colocando cada semilla dentro de los círculos pequeños de las leoquinas desde arriba hacia abajo, en este caso, sería siete semillas de maíz en la primera leoquina (desde la izquierda), seis semillas de poroto en la segunda leoquina y ocho semillas de haba en la tercera columna de las centenas. El segundo sumando se representa con las semillas, fuera de la Taptana UNAE. En este caso se coloca en la parte lateral izquierda de la tabla, dos semillas de maíz, tres semillas de poroto y una semilla de haba (Figura 54).

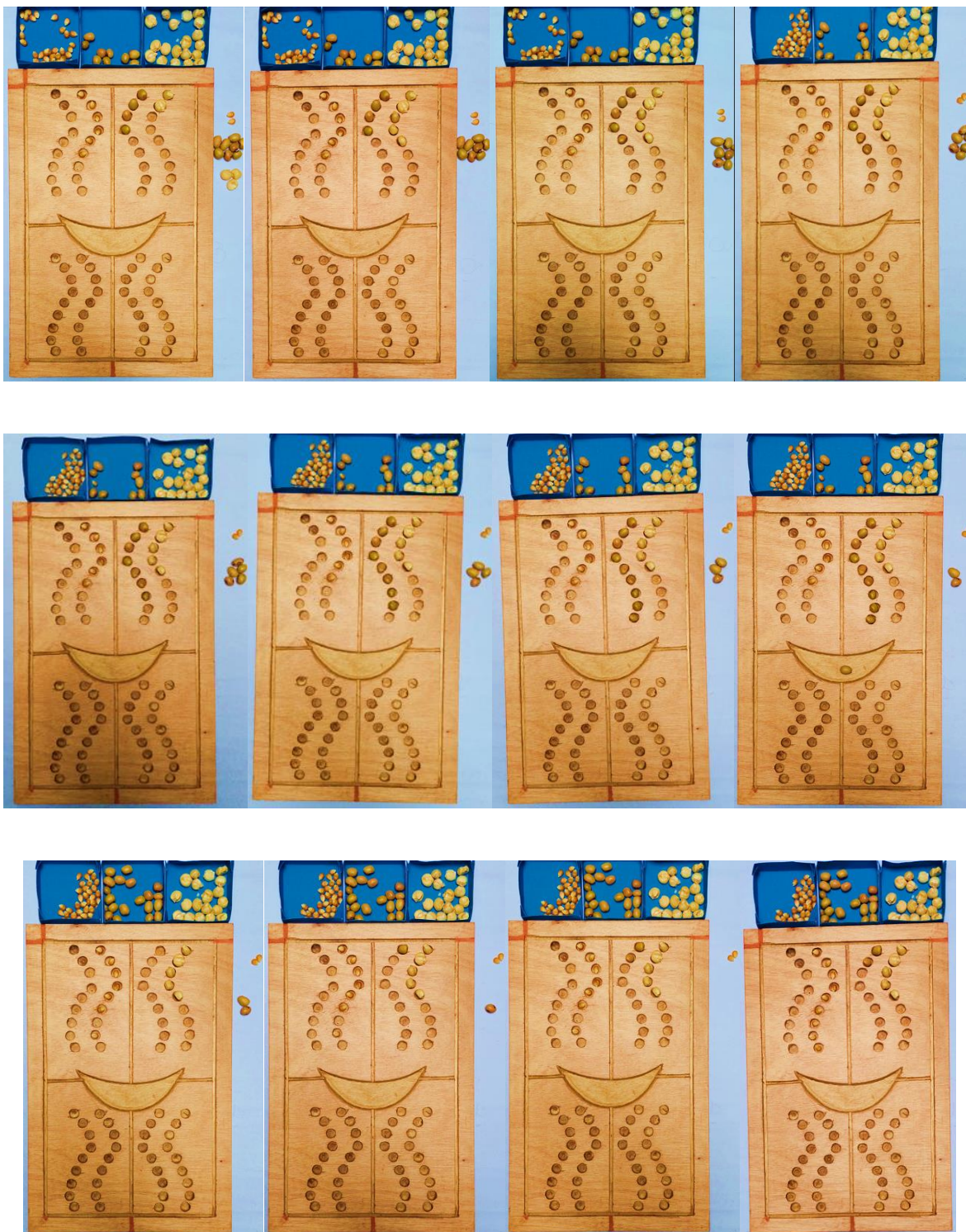
Figura 54*La Taptana UNAE*

Nota. La Taptana UNAE con la representación del 642 con semillas dentro de la Tabla y la representación del 283 con semillas, fuera de la tabla. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

3. Las semillas del segundo sumando, que estaban fuera de la Taptana UNAE, se colocan dentro de cada leoquina, debajo de la representación del primer sumando. De acuerdo con el ejemplo, en la leoquina de las unidades, están dos semillas de maíz del primer sumando y se añade tres maíces del segundo sumando. En la segunda leoquina de las decenas, están cuatro semillas de poroto del primer sumando, al añadir las ocho semillas de poroto del segundo sumando, se evidencia que al colocar las primeras cinco semillas se llena la segunda leoquina, por lo que se añade un poroto más sobre la Luna, se forma una decena, por lo que se retira las diez semillas de poroto y se coloca un haba en la tercera leoquina, por último, se coloca los dos porotos restantes del segundo sumando, sobre la segunda leoquina. Finalmente, se coloca debajo de las siete semillas de haba de la tercera leoquina, las dos habas del segundo sumando (Figura 55).

Figura 55

La Taptana UNA E

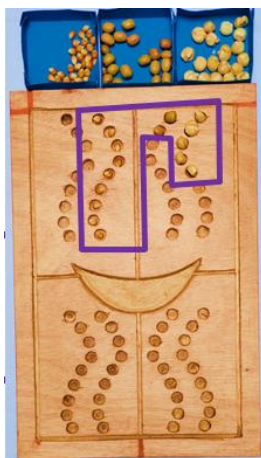


Nota. Secuencia de la suma de $642+283$ sobre la Taptana UNAE. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

4. Se cuenta de derecha a izquierda el número de semillas que quedó en cada leoquina. De acuerdo al ejemplo cinco semillas de maíz, dos semillas de poroto y nueve semillas de canguil, resultando 925 (Figura 56)

Figura 56

La Taptana UNAE



Nota. La Taptana UNAE con la representación del 925 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

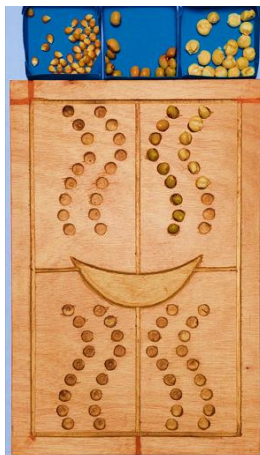
La *resta sin reagrupación* en la Taptana UNAE se realiza desde arriba hacia abajo y se siguen los siguientes pasos:

1. Se establece una representación con material tangible, para cada valor posicional, para ejemplificar, asimismo se coloca para las unidades una semilla de maíz, para las decenas una semilla de poroto y para las centenas una semilla de haba (Figura 57).

Figura 57*La Taptana UNAE*

Nota. La Taptana UNAE con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

2. Se representa solamente la cifra del minuendo, la del sustraendo indicará cuantas semillas se deberá retirar del minuendo. Por ejemplo, si se quiere operar $96-73$, se representa el minuendo colocando seis semillas de maíz en la primera columna de las unidades y nueve semillas de poroto en la segunda columna de las decenas (Figura 58).

Figura 58*La Taptana UNAE*

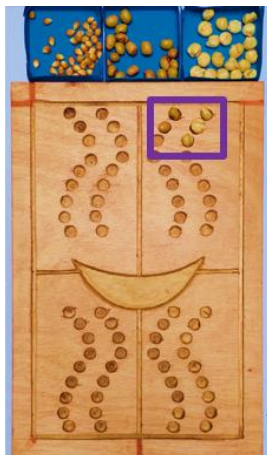
Nota. La Taptana UNAE con la representación del 96 con semillas dentro de la Tabla. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

3. La cifra del sustraendo representará cuantas semillas se disminuirá o retirará del minuendo que está representado sobre la Taptana UNAE. Siguiendo el mismo ejemplo, se retira tres maíces en la primera leoquina de las unidades y se retira siete porotos en la segunda leoquina de las decenas (Figura 59).

Figura 59*La Taptana UNAE*

Nota. Secuencia de la resta de 96-73 sobre la Taptana UNAE. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

4. Se cuenta de derecha a izquierda el número de semillas que quedó en cada leoquina. De acuerdo al ejemplo quedan tres maíces en la columna de las unidades y dos porotos en la columna de las decenas, lo cual da como resultado 23 (Figura 60).

Figura 60*La Taptana UNAE*

Nota. La Taptana UNAE con la representación del 23 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

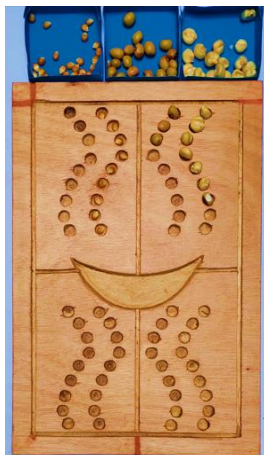
Para la *resta con reagrupación* en la Taptana UNAE se siguen los siguientes pasos:

1. Se establece una representación con material tangible, para cada valor posicional, para ejemplificar, asimismo se coloca para las unidades una semilla de maíz, para las decenas una semilla de poroto y para las centenas una semilla de haba (Figura 61).

Figura 61*La Taptana UNAE*

Nota. La Taptana UNAE con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

2. Se representa solamente el minuendo dentro de los círculos pequeños y el sustraendo será la cantidad de semillas que se deba retirar del minuendo. Por ejemplo, si se quiere operar $937-118$, se representa el minuendo colocando siete semillas de maíz en la leoquina de las unidades, tres semillas de poroto en la leoquina de las decenas y nueve semillas de haba en la leoquina de las centenas (Figura 62).

Figura 62*La Taptana UNAE*

Nota. La Taptana UNAE con la representación del 937 con semillas dentro de la Tabla. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

3. La cifra del sustraendo representará cuanto disminuirá la primera cantidad representada (minuyendo). Siguiendo el mismo ejemplo, se quiere retirar ocho maíces en la primera columna de las unidades, sin embargo, las unidades del minuendo son solo siete. Entonces, pedimos una decena, que son 10 unidades, a la segunda leoquina, se retira un poroto en la columna de las decenas y se añade 10 maíces en la primera leoquina, entonces, en la primera leoquina quedaría 17 maíces, a esa cantidad le retiramos los ocho maíces que requeríamos retirar inicialmente, quedándonos nueve maíces. En la segunda leoquina tenemos tres porotos y retiramos un poroto del minuendo. Por último, retiramos un haba de la tercera leoquina (Figura 63).

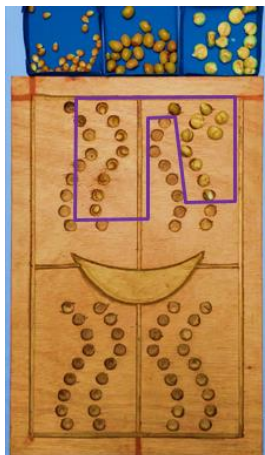
Figura 63

La Taptana UNAE



Nota. Secuencia de la resta de 937-118 sobre la Taptana UNAE. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

4. Se cuenta de derecha a izquierda el número de semillas que quedó en cada columna. De acuerdo al ejemplo, quedan nueve maíces en la columna de las unidades, un poroto en la columna de las decenas y ocho habas de la leoquina de las centenas, resultando 819 (Fig. 64).

Figura 64*La Taptana UNAE*

Nota. La Taptana UNAE con la representación del 819 con semillas. Fotografía tomada por Cabrera (2021).

En síntesis, la Taptana cañari, Montaluisa y UNAE son recursos que no promulgan la memorización de cantidades, sino que a través de la manipulación de objetos concretos que se colocan y retiran de las tablas se puede comprender las nociones de suma y resta.

2.2. Breve reseña histórica sobre la Yupana

El origen de la Yupana se atribuye al imperio Inca, el cual se estableció en los territorios actuales del Perú, Bolivia, Ecuador, el noroeste de Argentina y el norte de Chile, hace aproximadamente al año 1100 de nuestra era. Dentro de los aportes más importantes de los incas, destaca la creación de la Yupana, que es la denominación de un neologismo, que en

Quechua viene de la raíz “yupay” que significa contar y el sufijo “-na” que significa, lo que sirve para, es decir Yupana significa “lo que sirve para contar” (Prem, 2016). Varios cronistas de Indias describieron en sus libros acerca de esta tabla, una de las primeras publicaciones gráficas,

pertenecen al cronista Guaman Poma de Ayala, nombrada “Primer nueva crónica y buen gobierno”, publicada en 1615. En la crónica de Guaman Poma de Ayala, aparece un dibujo de una Yupana en la esquina inferior izquierda, en este dibujo se detalla una tabla rectangular subdivida en rectángulos más pequeños, en los que se encuentran unas oquedades menores, de similar tamaño, como se puede ver en la figura 65. El cronista Guaman Poma de Ayala (1987) describe en su texto lo siguiente:

...cuentan en tablas, numeran de cien mil, y de diez mil, y de ciento, y de diez, hasta llegar a una, de todo lo que pasa en este reino lo asienta, y fiestas y domingos, y meses, y años, y en cada ciudad y villa, y pueblos de [hombres/andinos] había estos dichos contadores y tesoreros en este reino... (p. 364)

Figura 65

Crónica de Guaman Poma de Ayala



Nota. En el dibujo de la crónica de Guaman Poma de Ayala se visualiza un contador (inca de la realeza) con su khipu y a una Yupana (tabla de contar) en la esquina inferior izquierda. La Yupana Inca, Guaman Poma de Ayala, 1615.

Otra representación encontrada de la Yupana, se halla en una vasija inca (Figura 66). La escena tallada sobre la vasija muestra, a cinco personas en un desfile, que están transportando un tablero grande subdividido en veinte casilleros, cuatro columnas y 5 filas, en las cuales se inscriben dos puntos superiores (Pacheco, 1999).

Figura 66

Vasija Inca



Nota. Representación de una Yupana sobre una vasija Inca. Tomada de la Vasija Inca, por Pareja, 1986.

También, Acosta (1986) describe encantado cómo los incas realizaban cuentas en una tabla usando granos de maíz:

...pues verles otra suerte de quipos, que usan de granos de maíz, es cosa que encanta; porque una cuenta muy embarazosa, en que tendrá un muy buen contador que hacer por pluma y tinta, para ver a como les cabe entre tantos, tanto de contribución, sacando tanto de acullá y añadiendo tanto de acá, con otras cien retartalillas, tomarán estos indios sus granos y pondrán uno aquí, tres acullá, ocho no sé dónde; pasarán un grano de aquí, trocarán tres de acullá, y, en efecto, ellos salen con su cuenta hecha puntualísimamente sin errar un tilde, y mucho mejor se saben ellos poner en cuenta y razón de lo que cabe a cada uno de pagar o dar, que sabremos nosotros dárselo por pluma y tinta averiguado. Si esto no es ingenio y si estos hombres son bestias, júzguelo quien quisiere, que lo que yo juzgo de cierto es que, en aquello que se aplican, nos hacen grandes ventajas... (Acosta 1986, p. 403)

Así mismo, Garcilaso de la Vega (1609), evidenció que para saber lo que debían repartir a cada pueblo, los incas hacían las particiones con granos de maíz y piedrezuelas sobre un tablero, de manera que les salía una cuenta exacta para cada pueblo, lo enuncia así:

...los contadores o escribanos que tenían los nudos y cuentas de los tributos y delante del curaca y del gobernador Inca hacían las cuentas y particiones por los nudos de sus hilos y con piedrezuelas, conforme al número de los vecinos de la tal provincia, y las sacaban tan ajustadas y verdaderas, que en esta parte yo no sé a quién se pueda atribuir mayor alabanza, si a los contadores, que, sin cifras de guarismos, hacían sus cuentas y particiones ajustadas de cosas tan menudas, cosa que nuestros aritméticos suelen hacer con mucha dificultad, o al gobernador y ministros

regios, que con tanta facilidad entendían la cuenta y razón que de todas ellas les daban. (Garcilaso de la Vega, 1991 [1609], p. 245).

Ahora bien, desde inicios del Siglo XX, se han realizado estudios para proponer algoritmos aritméticos con la Yupana, surgiendo así diversas propuestas de decodificación y manejo de la misma, por lo que, existen muchas hipótesis y variadas formas de interpretación de la Yupana (Prem, 2018, p.13). De acuerdo con Saldivar, Saldivar y Goycochea (2019), las hipótesis planteadas acerca del posible uso y manejo de la Yupana inca difieren entre unas y otras, principalmente en aspectos como: la posición de la Yupana (vertical u horizontal), los valores asignados en los puntos que están dentro de cada casillero, el uso de los puntos que están dentro de las casillas como elementos de posicionamiento de fichas y/o siendo tomados solamente valores referenciales y el algoritmo propuesto para las distintas operaciones matemáticas.

La Yupana fue usada por primera vez usada como material educativo por la docente peruana Martha Villavicencio Ubillús en el año 1982; en la aplicación de la enseñanza- aprendizaje de la matemática. Sin embargo, esta investigación propone la metodología Tawa Pukllay, desarrollada por Prem (2016), por ser la propuesta algorítmica más práctica para la educación, en la que no hay necesidad de usar algoritmos aritméticos tradicionales o indo-arábigo. Como se muestra en la Figura 67, el modelo de Yupana presentada por Prem (2016) mantiene el modelo básico mostrado en el dibujo de la obra de Guamán Poma de Ayala (Figura 65), la cual está conformado por cuatro suyus (columnas) y cinco washus (filas), formando 20 casilleros. Cada casillero presenta pequeños círculos de 5, 3, 2 y 1 círculos respectivamente. La primera fila (desde el inferior de la tabla), es para las unidades o en quechua igual a sapanka, la segunda fila corresponde a las decenas o chunka,

la siguiente fila es para las centenas o pachaq, la tercera fila pertenece a los millares o waranqa, por último, la quinta fila es de las decenas de millar o chunka waranqa. De acuerdo al mismo autor, se pueden seguir construyendo más filas, por ejemplo, una sexta fila para las centenas de millar o pachaqwaranqa y así sucesivamente. Para la representación de los números sobre la Yupana se lo hace de arriba abajo, siguiendo la racionalidad cañari.

Figura 67

Yupana de Dhavit Prem



Nota. Yupana de madera con la interpretación de Dhavit Prem. Yupana de Dhavit Prem [Fotografía], Prem, 2016.

2.2.1. Importancia de la Yupana como material didáctico

De acuerdo con Prem (2016), la importancia de la Yupana como material didáctico radica en el uso de una alternativa diferente de aprendizaje lúdico y concreto de la aritmética, muy atractivo para todas las edades, en el que se pueda utilizar otro tipo de procesos mentales más intuitivos, que no requieran el uso de la memoria, ni del cálculo. Además, facilita el aprendizaje de las operaciones básicas, específicamente de la suma y resta, a estudiantes con dificultades de

aprendizaje numérico. Por último, dependiendo de los problemas aritméticos que se realicen aplicando este método, los estudiantes producen resultados exactos y dependiendo del grado de habilidad de quien realice las operaciones, adquirido mediante la constante práctica, los estudiantes tendrán mayor rapidez al resolver los problemas que con forma tradicional o indo-arábica.

2.2.2. Funciones matemáticas de la Yupana

De acuerdo a Villavicencio (1982), las funciones matemáticas que cumple la Yupana como material didáctico son:

1. Reconocer la representación concreta del número.
2. Comprender el valor posicional de los números.
3. Comprender los algoritmos de las operaciones numéricas, como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.
4. Calcular operaciones aritméticas de la suma, resta, multiplicación y división con reagrupación y sin reagrupación.
5. Comprender los procesos de secuenciación numérica.

2.2.3. La Yupana en la enseñanza de suma y resta

Como se indicó en la sección anterior, una de las funciones de la Yupana es facilitar la comprensión y cálculo de las cuatro operaciones básicas, pero, para propósitos de este trabajo solamente se abordará dos de las operaciones básicas: la suma y la resta. A continuación, se describe la forma de realizar cálculos de suma y resta utilizando la Yupana con la metodología Tawa Pukllay.

La Suma con reagrupación y sin reagrupación

Antes de explicar los pasos para operar una suma con reagrupación y sin reagrupación con la Yupana, es necesario saber que la Yupana se colocará en posición vertical como se visualiza en la Figura 68. El tablero de la Yupana está conformado por cinco filas y cuatro columnas, formando un total de 20 casilleros. Cada casillero presenta pequeños círculos de 5, 3, 2 y 1 círculos respectivamente, con el valor una unidad por círculo.

Figura 68

La Yupana



Nota. Yupana realizada con madera. Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

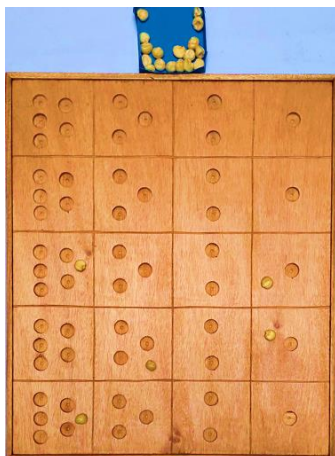
Para realizar la suma *sin reagrupación* se hace lo siguientes pasos:

1. Se representa el primer sumando sobre el tablero de la Yupana, dependiendo de la posición de las cantidades. Por ejemplo, si se desea sumar $645+134$, se representa la primera cifra con las semillas. Para operar con la Yupana se usará una clase de semillas, en este caso, se usará maíces, por lo que se coloca un maíz sobre el casillero que tiene cinco círculos de la primera fila (desde abajo). En la segunda fila (desde abajo) ponemos un maíz sobre el casillero que tiene tres círculos y otro maíz en el casillero que tiene un círculo. Sobre la tercera fila,

situamos un maíz en el casillero que tiene cinco círculos y un maíz sobre el casillero que tiene un círculo, (ver figura 69).

Figura 69

La Yupana



Nota. Yupana (Tawa Pukllay) con la representación del número 645 con semillas de maíz.

Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

2. Del mismo modo se representa con los maíces la segunda cifra. Según el ejemplo planteado, colocamos en la primera fila (desde abajo) un maíz en el casillero que tiene tres círculos y un maíz en el casillero que tiene un círculo. En la segunda fila (desde abajo), situamos un maíz en el casillero que tiene tres círculos. En la tercera fila (desde abajo), colocamos un maíz en el casillero que tiene un círculo (Figura 70).

Figura 70

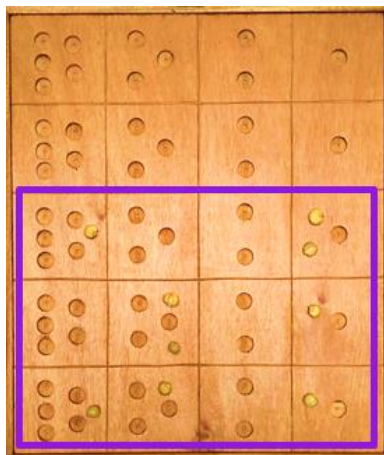
La Yupana



Nota. Yupana (Tawa Pukllay) con la representación del número 645 y 134 con semillas de maíz.

Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

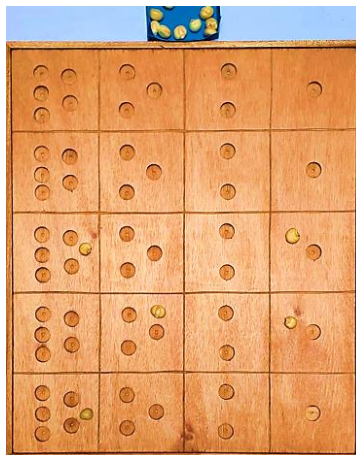
3. Se cuenta de abajo hacia arriba el número de semillas de maíz que quedó en cada columna. De acuerdo al ejemplo en la fila de las unidades, queda un maíz en el casillero que tiene uno, tres y cinco círculos, porque al contar los círculos resulta nueve. En la fila de las unidades, se encuentra dos maíces en el casillero que tiene tres círculos y un maíz en el casillero que tiene un círculo, así mismo, se cuenta los círculos y resulta siete. Por último, la fila de las centenas tiene un maíz en el casillero que tiene cinco círculos y dos maíces en el casillero que tiene un círculo, resultando siete. El total de la suma es 779. (Figura 71)

Figura 71*La Yupana*

Nota. Yupana (Tawa Pukllay) con la representación del número 779 con semillas de maíz.
Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

Para la *suma con reagrupación* en la Yupana se sigue los siguientes pasos:

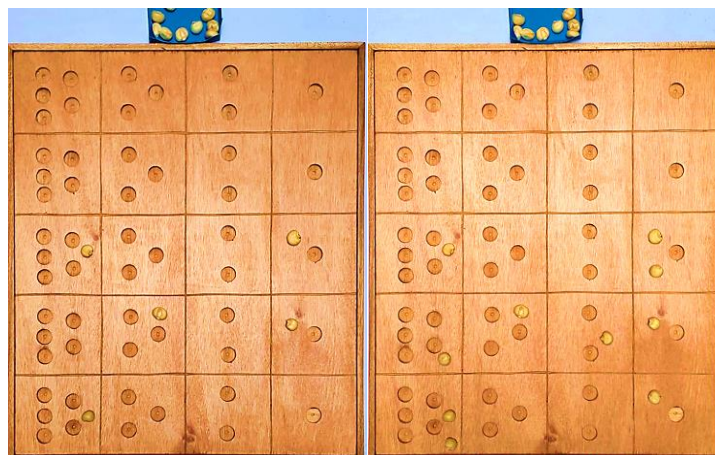
1. Se representa el primer sumando sobre el tablero de la Yupana, dependiendo de la posición de las cantidades. Por ejemplo, si se desea sumar $645+176$, se representa la primera cifra con las semillas en este caso, también, se usará maíces, por lo que se coloca un maíz sobre el casillero que tiene cinco círculos de la primera fila (desde abajo). En la segunda fila (desde abajo) ponemos un maíz sobre el casillero que tiene tres círculos y otro maíz en el casillero que tiene un círculo. Sobre la tercera fila, situamos un maíz en el casillero que tiene un círculo. Sobre la tercera fila, situamos un maíz en el casillero que tiene cinco círculos y un maíz sobre el casillero que tiene un círculo, (ver figura 72).

Figura 72*La Yupana*

Nota. Yupana (Tawa Pukllay) con la representación del número 645 con semillas de maíz.

Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

2. Del mismo modo se representa con los maíces la segunda cifra. Según el ejemplo planteado, colocamos en la primera fila (desde abajo) un maíz en el casillero que tiene cinco círculos y un maíz en el casillero que tiene un círculo. En la segunda fila (desde abajo), situamos un maíz en el casillero que tiene cinco círculos y otro maíz en el casillero que tiene dos círculos. En la tercera fila (desde abajo), colocamos un maíz en el casillero que tiene un círculo (Figura 73).

Figura 73*La Yupana*

Nota. Yupana (Tawa Pukllay) con la representación del número 645 y 176 con semillas de maíz.

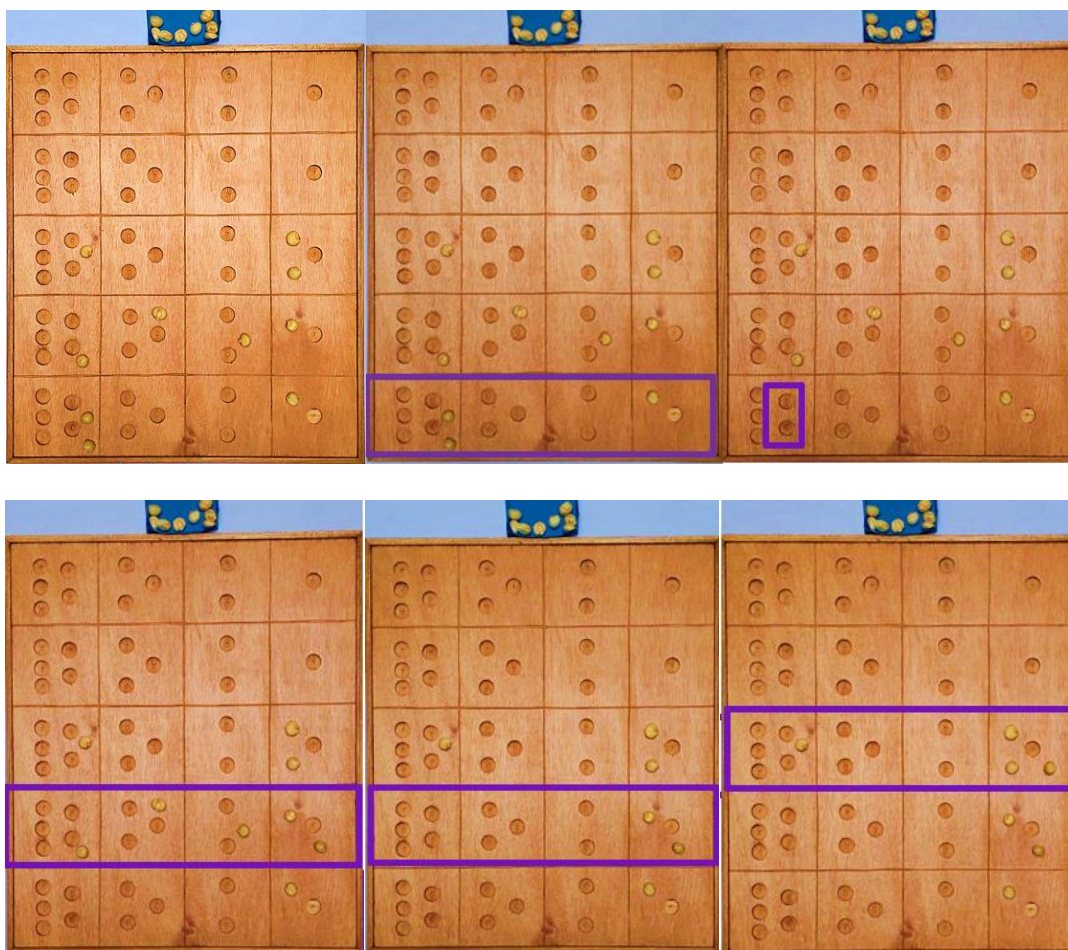
Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

3. Se cuenta de abajo hacia arriba el número de semillas de maíz que quedó en cada fila. Como estamos realizando una suma con reagrupación, revisamos en cada fila, si al contar los círculos, obtenemos el valor de 10 círculos y procedemos a transformarlos. Por ejemplo, en la fila de las unidades, queda dos maíces en el casillero de cinco círculos y un maíz en casillero con un círculo, en total están once círculos, por lo que nos toca transformar diez de los once círculos por una decena, entonces quitamos los dos maíces del casillero de cinco círculos de la primera fila y colocamos un maíz en la segunda fila, dentro del casillero con un círculo. En la fila de las decenas, se encuentra dos maíces en el casillero que tiene un círculo y un maíz en el casillero que tiene cinco, tres y dos círculos, así mismo, se cuenta los círculos y resulta doce círculos, por lo que transformamos, diez de los doce círculos por una centena, entonces quitamos los maíces de los casilleros que tienen cinco, tres y dos

círculos y ponemos un maíz en el casillero que tiene un círculo de la fila de las centenas.
Por último, la fila de las centenas tiene un maíz en el casillero que tiene cinco círculos y dos maíces en el casillero que tiene un círculo, resultando siete (Figura 74).

Figura 74

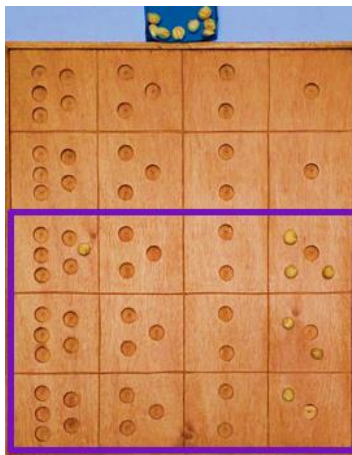
La Yupana



Nota. Secuencia de la Yupana (Tawa Pukllay) con la suma entre 645 y 134 con semillas de maíz.

Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

4. El total de la suma es 821. (Figura 75).

Figura 75*La Yupana*

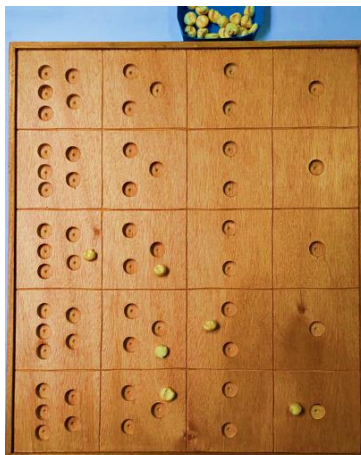
Nota. Yupana (Tawa Pukllay) con la representación del número 821 con semillas de maíz.

Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

Resta sin reagrupación y con reagrupación

Para realizar la *resta sin reagrupación* se sigue los siguientes pasos:

1. Para realizar la resta sin reagrupación, solo representaremos el minuendo. Por ejemplo, se restará $854-531$, se representará solamente el minuendo (854), en la primera fila de las unidades un maíz en el casillero con uno y tres círculos; en la fila de las decenas, un maíz sobre el casillero de cinco círculos; y, en la fila de las centenas un maíz en el casillero de cinco y tres círculos (Figura 76).

Figura 76*La Yupana*

Nota. Yupana (Tawa Pukllay) con la representación del número 854 con semillas de maíz.

Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

2. Comenzamos a retirar las semillas representadas según indique el sustraendo. En este ejemplo el sustraendo es 531, por lo que retiramos de la fila de las unidades una semilla de maíz del casillero de un círculo; de la fila de las decenas retiramos un maíz del casillero de tres círculos; y, de la fila de las centenas retiramos un maíz del casillero de cinco círculos. (Figura 77).

Figura 77

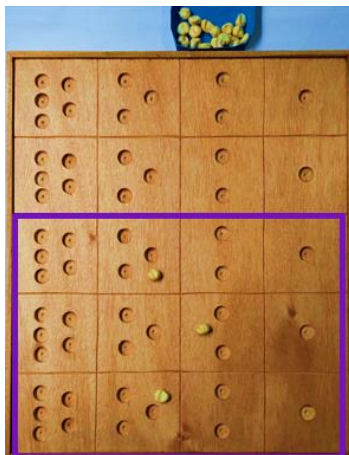
La Yupana



Nota. Secuencia de la Yupana (Tawa Pukllay) con la resta entre 854y 531con semillas de maíz.

Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

3. Se cuenta de abajo hacia arriba en número de círculos de cada fila. En el ejemplo, en la primera fila se encuentra un maíz en el casillero con tres círculos. En la segunda fila, está un maíz en el casillero con dos círculos. En la tercera fila, se sitúa un maíz en el casillero con tres círculos. El resultado es, 323 (Figura 78).

Figura 78*La Yupana*

Nota. Yupana (Tawa Pukllay) con la representación del número 323 con semillas de maíz.

Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

Con respecto a la *resta con reagrupación* se realiza de la siguiente forma:

1. Para la resta con reagrupación, solo representaremos el minuendo. Por ejemplo, se restará 197-148, se representará solamente el minuendo (197), entonces, colocamos en la primera fila de las unidades un maíz en los casilleros con dos y cinco círculos. En la fila de las decenas, ponemos un maíz sobre los casilleros que tiene uno, tres y cinco círculos. Finalmente, en la fila de las centenas, situamos un maíz en casillero que tiene un círculo (Figura 78).

Figura 78

La Yupana

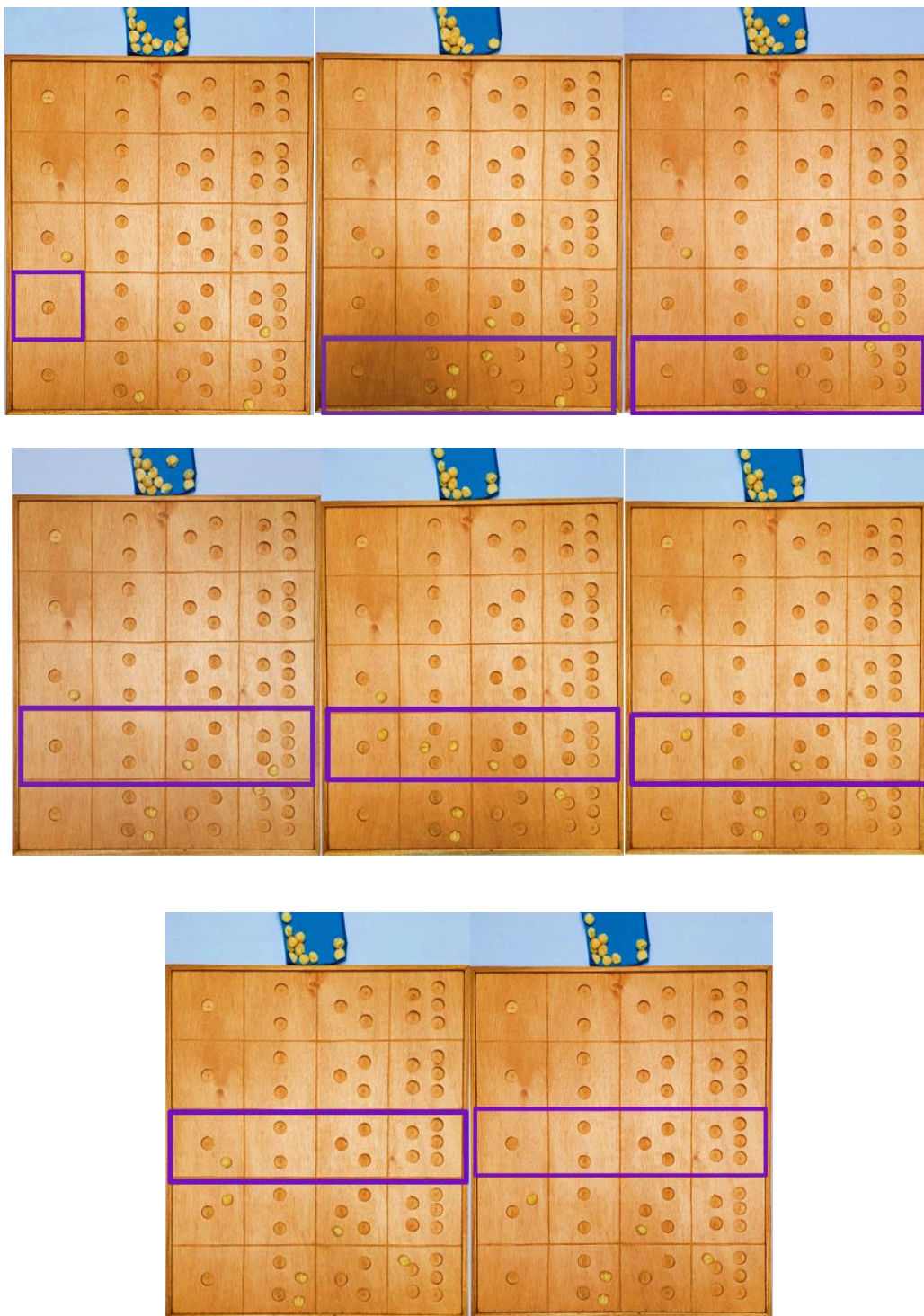


Nota. Yupana (Tawa Pukllay) con la representación del número 197 con semillas de maíz.
Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

2. Comenzamos a retirar las semillas que se representó previamente sobre la Yupana, según lo indique el sustraendo, de acuerdo al ejemplo planteado, el sustraendo es 148. En la fila de las unidades se necesita retirar ocho unidades, ya que solo está representado sobre la Yupana siete unidades, pedimos una decena y colocamos un maíz en los casilleros que tienen dos, tres y cinco círculos, después de haber colocado la decena sobre la fila de las unidades, retiramos los ocho maíces, es decir, un maíz de los casilleros que tienen tres y cinco círculos. En la fila de las decenas retiramos cuatro maíces, pero para retirarlos necesitamos en este caso descomponer cinco unidades, por lo que retiramos el maíz del casillero con cinco círculos y ponemos un maíz sobre el casillero con un círculo y dos maíces sobre el casillero con dos círculos, y retiramos los cuatro que nos pide la decena del sustraendo, es decir, quitamos los dos maíces que están encima el casillero de dos círculos. Finalmente, en la fila de las decenas, quitamos un maíz del casillero con un círculo (Figura 79).

Figura 79

La Yupana



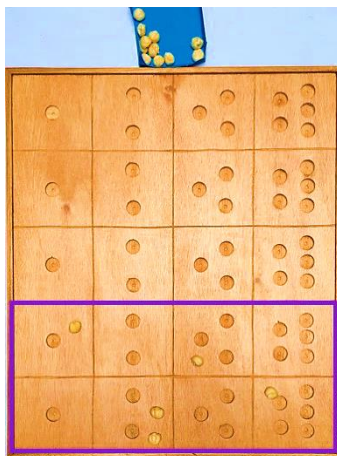
Nota. Secuencia de la Yupana (Tawa Pukllay) con la resta entre 197 y 148 con semillas de maíz.

Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

3. Se cuenta de abajo hacia arriba en número de círculos de cada fila. En el ejemplo, en la primera fila se encuentra un maíz en los casilleros con tres círculos y dos maíces sobre el casillero con dos círculos'. En la segunda fila, está un maíz encima de los casilleros con uno y tres círculos. En la tercera fila, no existe ningún maíz. El resultado es, 49 (Figura 80).

Figura 80

La Yupana



Nota. Yupana (Tawa Pukllay) con la representación del número 49 con semillas de maíz. Fotografía tomada por Cabrera, 2021.

En conclusión, la Yupana es un material que se emplea moviendo fichas dentro de los casilleros de una tabla, por lo que se considera una manera muy práctica de realizar sumas y restas, así mismo, no promulga la memorización de procesos, pues al ser un material concreto permite construir el aprendizaje de los estudiantes a través de su manipulación.

CAPÍTULO 3

Contribución de la Taptana y Yupana a la enseñanza-aprendizaje de la suma y resta

Varios estudios previos han demostrado que la Taptana y la Yupana son herramientas andinas que facilitan el aprendizaje de la suma y resta en educación básica. En los siguientes párrafos, se describirá, en primer lugar, estudios llevados a cabo, tanto en el contexto internacional como en el contexto nacional, sobre el aporte de la Taptana al aprendizaje de las matemáticas, seguido de estudios que demuestran el aporte de la Yupana a dicho aprendizaje. A continuación, se presentará la perspectiva de nueve docentes que usen la Taptana y la Yupana en el aprendizaje de la suma y resta de sus alumnos.

3.1. Contribución de la Taptana a la enseñanza aprendizaje de la suma y resta

Estudios sobre la Taptana han llamado la atención de investigadores internacionales y nacionales. A nivel internacional, se encuentra el estudio realizado por Neres, et al. (2019) en Brasil, cuyo objetivo fue proponer la enseñanza de las operaciones matemáticas desde el uso de la Taptana. La investigación tuvo una duración de cuatro meses, durante el primer mes los investigadores planificaron talleres de aprendizaje dirigidos a los docentes, las temáticas giraron en torno a la historia de la Taptana, la fabricación de la Taptana, y el modo de operar con la misma. Los meses posteriores, los docentes llevaron a la práctica los conocimientos adquiridos mediante los talleres con sus estudiantes. Al final del cuarto mes, los docentes reportaron que tanto a ellos como a sus estudiantes se les hizo muy fácil y divertido operar con la Taptana. Además, mencionaron que sus estudiantes lograron comprender fácilmente el valor posicional de los números, lectura de cantidades, suma, resta, multiplicación y división.

En la misma línea, el Ministerio de Educación de Perú (2020), realizó una investigación para mejorar la calidad de aprendizajes matemáticos, con el objetivo de evidenciar la existencia de

materiales didácticos que apoyen al aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes, para ello, recogieron las experiencias de docentes peruanos que usaban en sus clases instrumentos de cálculo andinos, incluyendo la Taptana. Los hallazgos señalaron que, la mayoría de docentes reportaron que la Taptana era la herramienta de mayor efectividad para ayudar a los estudiantes a resolver fácilmente sumas, restas, multiplicaciones y divisiones desde la manipulación directa con material concreto, además de ayudar a reconocer el valor posicional de los números. Así mismo, las docentes mencionaron que la Taptana motivó el gusto por las matemáticas a sus estudiantes, ya que aprenden mientras juegan.

A nivel nacional, Auccahuallpa e Ibarra (2019) realizaron una investigación con 54 docentes de educación básica, con el objetivo de desarrollar conocimientos sobre instrumentos de conteo andinos, incluido la Taptana, para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La metodología del trabajo fue una investigación de acción participativa mediante un taller de dos días, durante el cual los participantes conocieron y manipularon los materiales concretos. Una vez finalizado el taller, se realizó una socialización entre los participantes, y ellos concluyeron que la Taptana es un recurso importante que apoyaría a los docentes a construir en los estudiantes conceptos matemáticos desde lo concreto a lo abstracto, motivar el aprendizaje de las matemáticas, comprender el sistema decimal y operar sumas, restas y multiplicaciones con mayor facilidad.

Otro proyecto importante, fue planteado por Vasquez (2020), y apoyado por la Universidad de la Educación (UNAE), la organización de estados iberoamericanos (OEI) y la Casa de la Cultura Ecuatoriana, Núcleo del Cañar (CCE). En este proyecto Bernal (2020), plantea la Taptana: conocimiento integral, en dónde se brinda capacitación a docentes ecuatorianos acerca de la

Taptana desde un enfoque integral. Bernal, 2020 asegura que la aplicación de la Taptana, “posibilita generar cambios positivos en el sistema educativo, a la vez que evidencian como el incorporar elementos de identidad cultural facilitan desarrollar actividades y procesos innovadores para la educación” (pág. 6). El autor aplicó la Taptana a más de 30 instituciones educativas del Azuay y en algunas instituciones de la región costera del Ecuador, obteniendo resultados muy positivos entorno a la facilitación del aprendizaje de las cuatro operaciones básicas de las matemáticas.

A más de las investigaciones mencionadas, Alquina (2020) indagó acerca de la efectividad que tenía la Taptana como instrumento matemático para la enseñanza-aprendizaje de la suma y resta. La investigación se realizó con 60 estudiantes de cuarto año de educación básica en edades comprendidas entre 8 y 9 años. En una primera fase, se aplicó a los estudiantes una evaluación diagnóstica, con doce destrezas que incluían el reconocimiento del valor posicional de un número (unidades, decenas y centenas), la lectura y escritura de cantidades de tres cifras o menores, la comparación de números, la metodología para operar cantidades y la resolución de problemas con sumas y restas. La segunda fase investigativa, Alquina (2021) trabajó con la Taptana en dos clases por semana, de aproximadamente 80 minutos cada clase, durante 10 semanas. Finalmente, se aplicó una prueba que evaluó las mismas destrezas matemáticas que la prueba diagnóstica. Alquina (2021) concluyó que los niños mejoraron sus conocimientos en cuanto al reconocimiento del sistema decimal, la capacidad para operar sumas y restas con reagrupación y sin reagrupación, la construcción de cantidades y el manejo del valor posicional.

3.2. Contribución de la Yupana a la enseñanza aprendizaje de la suma y resta

Al igual que en el caso de la Taptana, investigaciones internacionales previas han demostrado la efectividad de la Yupana para enseñar a sumar y restar. Por ejemplo, a nivel

internacional, Prem (2014) propuso una metodología llamada Tawa Pukllay o los cuatros juegos sagradas, en donde aplica la Yupana sin límites de edades, en varios de los cursos que oferta dentro del Perú como fue de él. Prem (2014), ha obtenido excelentes resultados, en los que destaca la facilitación del aprendizaje entorno al aprendizaje de la suma, resta, multiplicación, división, el cálculo mental, la representación numérica, descomposición numeral y valor posicional.

Por su lado, Apaza (2017), propuso usar la Yupana como material manipulativo en el aprendizaje de la suma y resta en una institución educativa primaria de Perú. Para ello, trabajo durante cinco meses con niños de tercer año de educación básica, durante los cuales enseñó a los estudiantes el contexto histórico de la Yupana, el valor posicional a través de la Yupana y a operar sumas y restas. Finalmente, evaluó los conocimientos adquiridos a través de la Yupana, mediante actividades matemáticas relacionados a conocimientos de cantidad (números y operaciones). El autor concluyó que los estudiantes aprendieron a reconocer el valor posicional de los números y operar la suma y resta entre cantidades de hasta tres cifras.

Otro estudio sobre el tema es el realizado por Guzmán, Humaní y Moya (2018) quienes emplearon la Yupana con el objetivo de enseñar conceptos matemáticos de suma y resta a niños de tercer año una institución educativa de Perú. La investigación se llevó a cabo en tres etapas: Planificación de clases en donde se propuso la Yupana para el aprendizaje de la suma y resta, segundo, ejecución de las planificaciones en el periodo de dos meses y finalmente, evaluación de logros de aprendizaje desarrollados mediante actividades que incluían problemas matemáticos. Los investigadores concluyeron que la Yupana es una excelente herramienta para que los niños de tercer año de primaria puedan construir nociones de suma y resta y comprender el valor posicional de los números.

En Colombia, Gómez (2018), usó la Yupana en un aula de clases de tercero y quinto año de educación básica con el objetivo de que los estudiantes comprendan las operaciones matemáticas básicas. Inicialmente, se aplicó una evaluación diagnóstica en la que los estudiantes obtuvieron bajos promedios al operar con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, posteriormente, se implementó la Yupana en el aula de clases para enseñar a sumar, restar y multiplicar. Al finalizar el estudio, se evaluó los logros alcanzados por los estudiantes después del uso de Yupana y se concluyó que los estudiantes se motivaron al usar la Yupana ya que es una herramienta didáctica interesante, en la que a través del juego se puede ir aprendiendo, además, los niños pudieron operar, de manera más efectiva, sumas, restas y multiplicaciones con el uso de la Yupana.

Reyes (2018), propuso a la Yupana como instrumento de apoyo docente para el aprendizaje del valor posicional y de las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división, con el objetivo de mejorar las habilidades de cálculo de los niños de una escuela unidocente. El proceso de investigación se desarrolló en cuatro etapas: (1) investigación etnográfica y profundización de los conocimientos ancestrales, incluyendo la Yupana; (2) la planificación de unidades didácticas y diseño de sesiones de aprendizaje incorporando los conocimientos ancestrales, incluyendo la Yupana; (3) la ejecución de las planificaciones y, (4) la socialización y retroalimentación de la experiencia docente a nivel de red educativa. Reyes (2018) concluyó que introducir la Yupana para el aprendizaje de las matemáticas, los niños más pequeños aprenden las nociones de suma y resta y los estudiantes de grados superiores refuerzan y mejoran estas nociones. Además, hizo más significativo el aprendizaje de las sumas y restas en los estudiantes, pues se usaron materiales propios del contexto.

Así mismo, Prem (2014) propuso una metodología llamada Tawa Pukllay o los cuatros juegos sagradas, en donde aplica la Yupana sin límites de edades, en varios de los cursos que oferta dentro del Perú como fue de él. Prem (2014), ha obtenido excelentes resultados, en los que destaca la facilitación del aprendizaje entorno al aprendizaje de la suma, resta, multiplicación, división, el cálculo mental, la representación numérica, descomposición numeral y valor posicional.

Las investigaciones presentadas en este trabajo demuestran la eficacia de incluir a la Taptana y la Yupana como una herramienta didáctica dentro del aula de clase, puesto que, posee múltiples beneficios entre los cuales se resalta el aprendizaje de la suma y la resta de los estudiantes de educación básica. La mayoría de investigaciones presentadas provienen de Ecuador y Perú, ya que en sus territorios se han rescatado vestigios de la Taptana y la Yupana, instrumentos de cálculo usados por el pueblo cañari e inca.

3.3.Perspectivas docentes frente al uso de la Taptana y Yupana en el aprendizaje de la suma y resta

Para conocer, cuáles son las percepciones de los docentes acerca de la contribución de la Taptana y la Yupana al aprendizaje de la suma y la resta, se realizó una entrevista a nueve docentes en ejercicio, procedentes de Ecuador, Perú y Guatemala. Cinco ejercen la docencia en el nivel de educación básica y cuatro son docentes universitarios que también trabajan con estudiantes de educación básica empleando la Taptana y/o la Yupana. Cinco docentes trabajan con la Taptana y los otros cuatro con la Yupana. Con respecto a los docentes que aplicaban la Yupana, tres de los cuatro docentes aplicaban la metodología Tawa Pukllay y el otro docente empleaba la metodología de William Burns. Uno de los nueve docentes se desenvuelve en el sector privado y los demás en el sector público.

El cuestionario aplicado constó de nueve preguntas, dos de las cuales se centraron en conocer la percepción de los docentes sobre la contribución de la Taptana y la Yupana para el cálculo matemático dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la suma y la resta y las otras siete preguntas fueron oportunas para conocer otros aportes de la Taptana y la Yupana a la matemática en general, entre ellas, las destrezas asociadas a la matemática que se desarrollan mediante la Taptana y Yupana, la complejidad de la manipulación de las herramientas, la aceptación de los estudiantes frente al uso de las herramientas. Además, se reportará las consideraciones previas del uso de Taptana y la Yupana, el posible rango de edades recomendadas para la aplicación de la Taptana y la Yupana. A continuación, se describirán los resultados obtenidos a partir de las entrevistas realizadas:

Con respecto a las percepciones y experiencias de los docentes sobre de la contribución de la Taptana y la Yupana al aprendizaje de la suma y la resta, los docentes afirmaron que, efectivamente, tanto la Taptana como la Yupana fueron herramientas útiles para la enseñanza-aprendizaje de la suma y resta de los niños de educación básica. En primer lugar, la Taptana y la Yupana permitieron desarrollar la etapa concreta de la matemática, necesario para adquirir nociones de suma y resta, o en palabras de un docente:

...mientras mueven las fichas o maíces, agrupan y van entendiendo la noción de la suma, es decir, que al tener yo dos maíces y añadirle otros dos maíces y al agruparle, unirle, añadirle, ya estoy operando y sumando, no estoy aprendiendo memorísticamente, sino a través de la misma manipulación del material concreto, ya estoy operando, usar estos materiales, significa reconocer situaciones en las que la suma y resta son útiles, no solo en abstracción, sino entendiendo el porqué del movimiento...

En segundo lugar, los entrevistados afirmaron que contribuyen al desarrollo del razonamiento lógico para la resolución de problemas matemáticos cotidianos que involucran sumar y restar, pues existe un vínculo entre las nociones de agrupar o quitar, la manipulación de las semillas y la situación en la que se necesite operar, así lo menciona un docente:

...porque les enseña a razonar y comprender que la resta no solo es quitar, sino hacerles entender a los estudiantes que yo voy quitando las semillas y las dejo al lado, porque pasó algo, puede ser que las preste, porque tenía que pagar o se me perdieron, ósea de acuerdo a la situación, además, cuando uno les pone problemas matemáticos, ellos ya los resuelven fácil, pues su razonamiento ya está avanzado...así también sucede con la suma, en teoría te enseñan que la suma es agregar elementos de un conjunto A hacia un B, a nosotros se nos hace fácil, pero a los niños les resulta sumamente abstracto, pues no saben que es A o es B, con estos instrumentos trabajas esa parte, ellos experimentan que es agregar y la razón por la que agregan, que resulta al final más fructífero que solamente aprenderse un algoritmo y un concepto, también adjuntar problemas cotidianos que ellos vivencian con la suma o la resta supera la riqueza de los instrumentos.

Dentro de la misma línea, otro docente comentó que estas herramientas permiten el desarrollo del razonamiento lógico en los estudiantes:

... porque no son en base de lo simbólico ni de la memorización, sino que son en base de trabajar con elementos reales, lo que permite que los estudiantes aprendan también desde su contexto y que sea aplicable a su realidad, incluso es importante que no se use las palabras suma o resta, sino más bien se usen los sinónimos de juntar, quitar, retirar,

añadir, etc, que expande su vocabulario matemático, además que son palabras que usan a diario

En tercer lugar, la Yupana y la Taptana, permitieron la participación activa del aprendizaje de las sumas y restas de los estudiantes, motivó a realizar estas operaciones sin necesidad de memorizar logaritmos, sino solamente aprenderse ciertos movimientos en las tablas de conteo que permiten obtener el mismo resultado que el método indo-arábico, metodología predominante en las aulas. De acuerdo a palabras de uno de los entrevistados y que resume la mayoría de respuestas de los entrevistados:

...ellos solo necesitan recordar movimientos, como el ajedrez, estratégico, ellos no se memorizan ningún proceso, sino mediante la necesidad del problema planteado ellos hacen los movimientos, uno solo les enseña el manejo de las semillas, pero ellos son los que crean sus conceptos de que añadir o juntar, unir es sumar y al contrario que quitar, cortar, sacar, mermar, es restar, mucho más constructivista y de acuerdo a cada caso.

En cuarto lugar, los docentes acuerdan que las herramientas ayudaron a los estudiantes a comprender la propiedad conmutativa de la suma, ya que como mencionaron los docentes:

...para colocar las cantidades no se necesita ningún orden específico, sino solo recordar algunos movimientos, y recordar que cada posición otorgará un nuevo significado al número y por ende modificará la suma, pero no hay problema si por ejemplo yo deseo sumar $8+4+9+6$, si colocamos todas las representaciones dentro de la fila de las unidades en cualquier orden no se altera el resultado, primero puede ir el ocho como el seis no se altera. Pero si se altera si por ejemplo colocamos

algunos de estos números dentro de otra fila a la que no pertenezca las unidades, ahí si cambiaria totalmente...

En quinto lugar, los entrevistados concordaron en que, la Taptana y la Yupana, facilitan el aprendizaje de la suma y resta de acuerdo a los ritmos de cada estudiante, y nivela el proceso de aprendizaje de todo el grupo de estudiantes al mismo tiempo, pues mencionaron que las tablas de conteo pueden ser adaptadas a las necesidades de cada estudiante, haciendo que incrementen la dificultad o disminuyéndola de acuerdo al caso. Concretamente, una docente menciona el siguiente ejemplo:

...yo cuando trabajo con esta herramienta me doy cuenta de que puedo realizarle varias adaptaciones curriculares para trabajar con niños con otras dificultades de aprendizaje... yo siempre a los niños que más les cuesta restar o sumar les pongo cantidades de hasta dos cifras y sin reagrupación, por ejemplo un $45+31$, ya cuando entienden bien, yo les pongo con más números y luego hasta les incremento la dificultad de los estudiantes, aquí yo me doy cuenta que todo este proceso lo puedo hacer con el mismo instrumento, porque así los permite, es adaptable, solo se requiere el ingenio, y todos los niños aprenden porque aprenden a sumar o restar, no es necesario que se queden otras clases ni nada...

En sexto lugar, motiva a los estudiantes a realizar sumas y restas por su cuenta, en ciertos casos son los mismos estudiantes quienes toman la iniciativa de incrementar la dificultad, es decir, haciendo sumas o restas de números con cifras grandes, creando sus propias situaciones y hasta muchas veces proponiendo su propia forma de llegar a la respuesta, como lo mencionó un docente:

... yo a veces les enseño a sumar con cifras de hasta tres números, ellos se emocionan tanto que no se quedan allí, sino suman con números más altos, compiten entre ellos para saber quién le gana a quien y prácticas, y ya sabe cómo dicen, la práctica hace al maestro, ellos ya luego hacen no más mentalmente, entre más practique mejor les sale las sumas...

Al respecto, otro entrevistado añadió:

...es curioso que hay estudiantes que se entusiasman tanto que cada vez hacen más rápido las operaciones, pues siempre encuentran nuevas formas para hacer las sumas... ya sea más rápido para competir con sus compañeros o para mostrarme como hicieron más rápido, así como el otra vez les mande a sumar $12+8+6$, un niño ya coloco primerito el doce sobre la tabla y luego puso ya la suma entre 8 y 6, o sea 14 y le sumo de una...

Por último, refuerza aprendizajes previos al aprendizaje de la suma y resta como el conteo, la asociación del símbolo con la cantidad, ordenación y comparación de cantidades y el valor posicional, que como mencionaron los docentes, “son conocimientos previos que influyen directamente en la comprensión de lo que es sumar y restar en los niños”

Otros beneficios del uso de la Taptana y la Yupana

Por otro lado, los docentes reportaron otros beneficios del uso de la Taptana y la Yupana en el aprendizaje de conceptos y destrezas matemáticas. Con respecto a los conceptos matemáticos, dijeron que tanto con la Taptana como con la Yupana se puede aprender a representar cantidades, componer y descomponer cantidades, asociar el símbolo con la cantidad, ordenar y comparar cantidades, multiplicar y dividir, además, un docente mencionó que “es adaptable a cualquier

aprendizaje que el docente quiera enseñar, solo es necesario que el docente tenga ganas de innovar”. Es importante mencionar, que los docentes afirmaron que la metodología Tawa Pucllay, es más fácil operar multiplicaciones y divisiones que con la metodología de William Burns, incluso uno de los co-fundadores del método Tawa Pukllay afirmó que:

...no hay mayor problema al multiplicar y dividir con nuestro método y no es necesario aprenderse previamente ninguna tabla de multiplicar o de dividir, menos aún memorizar un algoritmo, porque para operar solo es necesario reconocer movimientos de semillas sobre la Yupana, al principio puede costar como cualquier aprendizaje, pero mientras más practique más fácil se les hará hacer las multiplicaciones y divisiones...

Aunque otro docente que conocía la Yupana con la metodología de William Burns expuso que, “no escogería la Yupana para enseñar las multiplicaciones, ni divisiones, porque es muy abstracto y que es necesario saberse previamente las tablas de multiplicar”

Por otro lado, los docentes también reportaron que con la Taptana se puede aprender sobre el plano cartesiano, matrices, operaciones de polinomios, cambios de base y operaciones algebraicas, mientras que la Yupana sirve para enseñar porcentajes, potenciación y radicación. Las destrezas matemáticas que consideraron que desarrollan tanto la Taptana como la Yupana fueron, la agrupación, la observación, la clasificación, el orden espacial, la secuencialidad, los conceptos matemáticos, la asociación, la ubicación, la discriminación y la comparación. Además, de conocimientos y destrezas matemáticas, todos los docentes mencionaron que estas herramientas permiten aprender sobre el contexto histórico y la racionalidad del pueblo cañari e inca.

Con respecto a la aceptabilidad del uso de la Taptana y Yupana, los entrevistados consideraron que, tanto para a docentes de educación básica, bachillerato y universidad, como para los estudiantes de cualquier nivel, les agrada trabajar con los dos instrumentos, pues, resulta muy fácil su metodología. Por ejemplo, un docente expresó que:

... es una herramienta que se visualiza como un tablero de juego, de fácil empleo, manipulable, motivador, llamativo para la atención de los estudiantes por su forma y sus colores y promueve el trabajo grupal, claro que para ellos los profesores deben acercar a los estudiantes al material para que pueda ser aprovechado de igual forma...

Otro docente argumentó que:

... hay que primero, entender que la Taptana o la Yupana no son la solución a todos los problemas del aula, siempre hay más métodos que ayuden a los estudiantes, pero la esencia está en el uso y los objetivos que pongamos como docentes...perseverar y porque muchas veces uno llega al aula con las mejores intenciones pero resulta que no provoca mucha emoción en los estudiantes, por lo que también depende del contexto, pero en si es muy fácil y a mí me ha funcionado en mi clases la mayoría de veces con la mayoría de mis estudiantes.

Finalmente, los entrevistados recomendaron a los docentes que antes de emplear la Taptana y la Yupana en las aulas de clase con estudiantes, se realice una investigación previa de las dos herramientas, incluyendo, el contexto histórico de los cañaris e incas, Así lo mencionó un docente:

...es importante que aprendan a utilizar bien la Taptana, conocer su historia, quienes lo usaban y porque lo queremos utilizar ahora, porque hay muchos

profesores que dicen, que bonito la Taptana que chévere y piensan que es lo mismo que un ábaco, y no es correcto, sino yo recomiendo mejor entender la Taptana mediante investigaciones, videos que están en línea, pero más que todo ver si esta puede ser adaptada a los estudiantes.

También, según palabras de los docentes, es importante que antes de usar estas herramientas “empecemos con la adquisición de nociones básicas”, por ello, antes de enseñar las operaciones aritméticas usando estas herramientas, es importante aprender la relación entre cantidad-número, el valor posicional, las unidades, las decenas, las centenas, etc, que son nociones básicas que pueden ser enseñadas a través de la misma Taptana o la Yupana. Por otro lado, recomendaron que los estudiantes puedan construir su propia Taptana y Yupana con elementos de su entorno, para hacerlo más significativo su uso. Finalmente, los sugirieron que la Taptana y la Yupana sean aplicados tanto en la educación básica como en bachillerato y dijeron que su aplicación dependerá del ingenio del docente para adaptar la temática a estas herramientas, aunque recalcan lo indispensable del uso de este material durante los primeros años. Señalaron que incluso los pueden emplear docentes, estudiantes de docencia y profesores de universidad asociados o no al área de matemáticas, pues “ayudaría a revalorizar la cultura inca y cañari y su cosmovisión”.

CONCLUSIONES

Una vez terminado el trabajo sobre la importancia de la Taptana y la Yupana para aprendizaje de la suma y resta se puede concluir que, aunque la racionalidad matemática occidental ha predominado en la enseñanza de las matemáticas, en la actualidad, varios autores han demostrado la importancia de reconocer y trabajar las matemáticas tomando en cuenta otras racionalidades, propias de culturas ancestrales, como las de los pueblos cañaris e incas, quienes desarrollaron tablas de conteo que permitían desarrollar operaciones matemáticas, demostrando que estos pueblos también poseían conocimientos matemáticos.

Además, la realización de sumas y restas con ayuda de la Taptana y la Yupana permite que el aprendizaje de las matemáticas se desarrolle de manera significativa, puesto que no es necesario memorizar algoritmos para operar, sino que se requiere realizar movimientos sencillos y lógicos con material concreto (por ejemplo, semillas) sobre las tablas de conteo para obtener el resultado. Además, al ser un instrumento manipulable, los estudiantes experimentan la realización de sumas y restas con material concreto, indispensable para facilitar el tránsito de lo concreto a lo abstracto.

Asimismo, las investigaciones previas sobre la contribución de la Taptana y la Yupana al aprendizaje de las matemáticas han demostrado que, su uso no solo facilita el aprendizaje de sumas y restas de manera comprensible y divertida, sino que también promueve el desarrollo de otras habilidades como la representación de cantidades, composición, descomposición, orden, comparación de cantidades, multiplicación, división, porcentajes, potenciación, radicación, entre otras.

Por último, a partir de los resultados obtenidos en la entrevista realizada a nueve docentes de Ecuador, Perú y Guatemala que usan la Taptana o la Yupana en sus aulas de clase, se concluye



que, la Taptana y la Yupana son herramientas propicias para la enseñanza-aprendizaje de la suma y resta, puesto que facilita: el paso de lo concreto a lo abstracto, el desarrollo del pensamiento lógico, la participación activa del aprendizaje, la motivación hacia el aprendizaje, la comprensión de la propiedad conmutativa, la nivelación de aprendizajes y el desarrollo del conteo mental.

Además, con el uso de estas herramientas se pueden desarrollarse otros aprendizajes matemáticos con el uso de estas herramientas como la multiplicación, la división o la agrupación. Por último, y no menos importante, el uso de la Taptana y la Yupana ayuda a revalorizar la cultura inca y cañari, mediante el conocimiento de su cosmovisión, su racionalidad matemática y su cultura, reforzando las raíces de los pueblos andinos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, J. (1986). *Historia natural y moral de las Indias*. Editado por José Alcina Franch, Madrid: Crónicas de América 34, Historia 16.
- Alquinga, M. (2020). La Taptana o contador indígena como estrategia de aprendizaje en operaciones matemáticas básicas. *Revista Cátedra*, 3(3), 65-87.
- Anglin, W.S. (1994). *Mathematics: A concise history and philosophy*. Berlin: Springer.
- Apaza, J. H. (2017). La Yupana, material manipulativo para la educación matemática. Justicia social y el cambio educativo en niños de las comunidades quechuas alto andino del Perú (*Tesis doctoral*). Universidad de Madrid, Perú.
- Arana, J. (2015). *El proceso histórico de separación entre ciencia y filosofía*. Madrid: Real Academia de Ciencias Morales y Políticas.
- Arriaga, J. (1922). *Apuntes de arqueología Cañarí*. Publicaciones de la Universidad de Cuenca
- Arriaga, J. (1965). *Taptana o el ajedrez de Atahualpa, Cuadernos de Historia y Arqueología N° 8*: 3-21. Casa de la Cultura Ecuatoriana, Guayaquil.
- Auccahuallpa, R. e Ibarra, M. (2019). Investigación acción: innovando las clases de matemáticas a través de materiales concretos. Coloquio binacional sobre la enseñanza iv de la matemática llevado a cabo en Cuenca, Ecuador.
- Butsch, G. Calero, V. Muenala, H. (1998). *El contador indígena: (Taptana)*. Quito, Ministerio de Educación y Cultura.



- Castro, J. (2014). Taptana Cañari (Taptana Nikichik). En Pasto (presidencia). XII Coloquio Regional de matemáticas y II Simposio de estadística. Simposio llevado a cabo en Torobajo, Colombia.
- D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.
- Dussel, E. (2000). *La colonialidad del saber: eurocentrismo y ciencias sociales. Perspectivas Latinoamericanas en Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales* (Ed.), Europa, modernidad y eurocentrismo (pp. 24-33) CLACSO.
- Eggers Lan, C. (1995). *El nacimiento de la matemática en Grecia*. Eudeba.
- Garcilaso de la Vega, (1609). *Comentarios Reales de los Incas. Edición de Carlos Aranibar* Fondo Nacional de Cultura. Tomos I y II.
- Gómez, J. R. (2016). *La Yupana una estrategia pedagógica en primaria. Comunicación presentada en Encuentro de experiencias significativas*. El Carmen del Viboral.
- Guaman Poma de Ayala, F. (1987 [1615]). *Primer nueva crónica y buen gobierno*. Madrid: Historia 16.
- Guzman, L. E., Huamaní, V. y Moya, N. G. (2018). La aplicación de la Yupana y la Taptana para favorecer la resolución de problemas de adición y sustracción en los estudiantes del 3er grado de educación primaria de la I.E.B. “comunidad shipiba” del distrito del Rímac durante el año 2016 (*Tesis de pregrado*). Universidad de Ciencias y Humanidades, Perú.
- Guzñay, P. E. (2017). *Iberoamerica divulga*. Obtenido de Etnomatemáticas:
<http://www.oei.es/historico/divulgacioncientifica/?Etnomatematicas>



- Huapaya, E. y Salas, E. (2008). Uso de las Ideas Matemáticas y Científicas de los Incas, en la enseñanza - aprendizaje de la geometría. *Revista latinoamericana de matemáticas*. Vol 1. 4-12
- Luque, C., Mora, L. y Torres, J. (2005). *Didáctica de sistemas de notación de los números naturales*. Recuperado de: <https://www.usergioarboleda.edu.co/wp-content/uploads/2015/11/12.-Did%C3%A1ctica-de-sistemas-de-notaci%C3%B3n-de-los-n%C3%BAmeros-naturales.pdf>
- Micelli, M- L. & Crespo, C. R. (2012). Ábacos de América prehispánica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 5(1). 159-190.
- Milla, C. (1983). *Génesis de la cultura andina*. Fondo Editorial CAP. Colección Bional.
- Montaluisa, L. O. (2010). *Taptana Montaluisa*. Taptana Montaluisa.
- Neres, R. L.; Castro, E. R.; Miguel, J. C. (2019). Taptana: um recurso didático para o ensino e aprendizagem da matemática. *Revistas Espacios*. Vol. 40 (No 39). Pág. 10. Ministerio de Educación de Perú. 2020. Reflexiones sobre la educación intercultural Bilingüe en la región, Andina. GD IMPACTO SAC.
- Pacheco, O. (1999). *Del Quipu a la yupana : el computador ancestral*. Serie Etnogeometría para la etnomatemática N° 2. Bolivia: Editorial Cepdi.
- Pareja, D. (1986). Instrumentos prehispánicos de cálculo: el quipu y la yupana. *Revista Integración*, 4(1), 37-52.
- Parra, C. y Saiz, I. (2002). *Didáctica de matemáticas: aportes y reflexiones*. Buenos Aires. Editorial Paidós. 199 pp.



- Peña, A. (2005). *La racionalidad andina*. Editorial Mantaro.
- Pilares, G. (2005). Los sistemas numéricos del quechua y el aimara. *Revista andina*, 40, 149-178.
- Prem, D. (2014). *Yupana Inka. Decodificando la matemática Inka*. Lima. Editor: Carlos Gabriel Saldivar Olazo.
- Prem, D. (2016). *Yupana Inka. Decodificando la matemática Inka*. Lima. Editor: Carlos Gabriel Saldivar Olazo.
- Prem, D. (2018). *Hatun Yupana Qellqa*. Lima, Perú.
- Reyes, E. J. Incorporación de la Etnomatemática de los Kañaris de Lambayeque en la práctica docente intercultural bilingüe. *Anales de la Universidad Central del Ecuador*, Vol.1, No. 37, pp. 36-56.
- Ruiz, A. (2002). *Historia y filosofía de las matemáticas*. UNED
- Saldivar, C. J., Saldivar, A. G. y Goycochea, D. (2019). TAWA PUKLLAY - la aritmética inca de reconocimiento de formas y movimientos operable en paralelo y que no requiere cálculos numéricos mentales. *Revista Latinoamericana de Matemática educativa*, Vol 32 (1), pp. 354-363.
- Saneen, F. (1999). Una visión filosófica acerca de la enseñanza de las matemáticas Política y Cultura. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portuga*, Vol 1 (11), pp. 219-228.
- Valiente, T. y Küper, W. (1998). *Pueblos Indígenas y Educación*, Quito: Abya-Yala.



Vasquez, M. V. (2020). *La Taptana conocimiento integral*. Editorial Alfonso Maria Arce de la CCE, Núcleo del Cañar Veintiuno.

Villamil, J. y Scovedo, L. (2020). Perspectivas histórica y epistemológicas del número cero. *Revista Parxis y Saber*, 11(26), pp. 1-20.

Villavicencio, M. (2015). *Matemáticas en la educación intercultural bilingüe*. Orientaciones pedagógicas. Ministerio de Educación del Perú.

Villavicencio, M. (1983). *Guía de matemática 1*. INIDE.

Yanez, F & Yanez, M. (2014). Otra matemática es posible: culturas indígenas y sistemas de pensamiento. *Revista para el aula*, Vol. 12, pp 12.